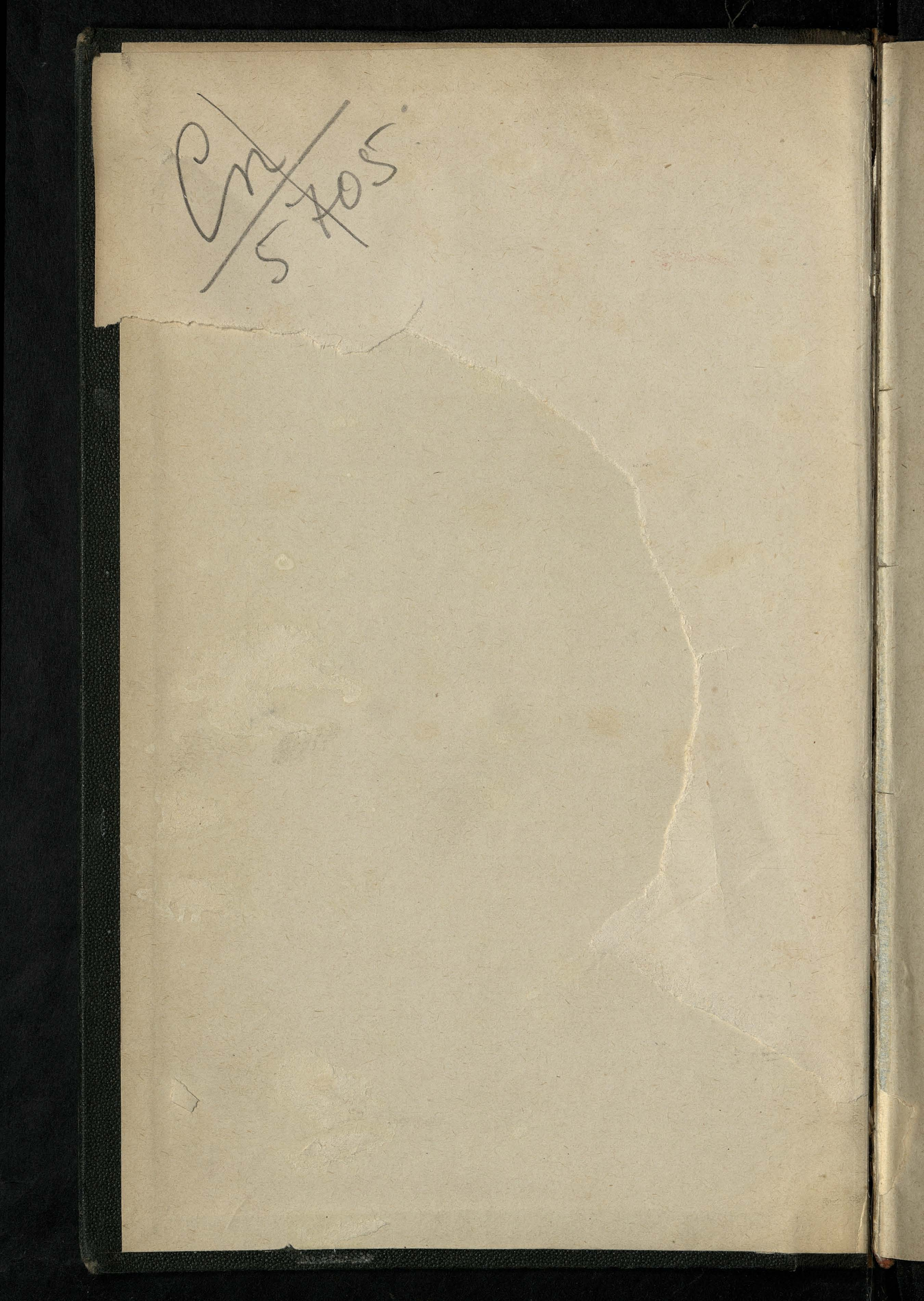

Cm
5705

НАЧАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРІЯ

ФРАНЦА СИМАШКО.

Рекомендована Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ заведеній какъ **УЧЕБНИКЪ** для Кадетскихъ Корпусовъ и Юнкерскихъ Училищъ. Допущена (7-е изданіе) Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія въ число **УЧЕБНЫХЪ ПОСОБІЙ** для Среднихъ Учебныхъ Заведеній.

Изданіе ВОСЬМОЕ, исправленное.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи В. Безобразова и Комп.
(Вас. Остр., 8 л., № 45).

1887.

Его Императорскому Высочеству

Государю Наслѣднику Цесаревичу

и

Великому Князю

Николаю Александровичу

Всеподаннѣйшее приношеніе.

Отъ Автора.

НАЧАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Введеніе.

1. Пространство безпредѣльное и ограниченное.—Три рода протяженій: объемы, поверхности и линіи.—Предметъ Геометріи.—Прямая линія; приписываемыя ей свойства; ея измѣреніе.—Плоскость.—Раздѣленіе Начальной Геометріи.

§ 1. Всякое тѣло занимаетъ опредѣленную часть безпредѣльнаго пространства.

Часть безпредѣльнаго пространства, занимаемая тѣломъ, называется его *объемомъ* или *геометрическимъ тѣломъ*.

§ 2. Всякое тѣло имѣетъ границы или предѣлы, въ которые оно заключено. Эти границы называются поверхностями. И такъ, *поверхностью тѣла называется предѣлъ или граница, которая отдѣляетъ его объемъ отъ остальнаго безпредѣльнаго пространства*.

§ 3. Поверхности тѣла имѣютъ также границы, именно тѣ мѣста, въ которыхъ встрѣчаются между собою части поверхности одного и того же тѣла, и называются *линіями*. Поэтому *линіею называется мѣсто встрѣчи двухъ поверхностей*.

§ 4. Линіи имѣютъ также границы: это тѣ предѣлы, въ которыхъ линіи встрѣчаются одна съ другою, и называются *точками*. Поэтому *точкою называется мѣсто встрѣчи двухъ линій*.

§ 5. Величина линіи зависитъ только отъ ея длины; ширины она вовсе не имѣетъ; поэтому говорятъ, что *линія имѣетъ одно только измѣреніе—въ длину*.

Величина поверхности зависитъ отъ ея длины и ширины, т. е. *поверхность имѣетъ два измѣренія*—въ длину и ширину.

Объемъ имѣетъ три измѣренія: длину, ширину и высоту или глубину.

Объемы, поверхности и линіи называются протяженіями.

Эти три рода протяженій, т. е. линіи, поверхности и объемы тѣлъ, можно разсматривать независимо одно отъ другого. Напримѣръ, желая знать высоту амбара, вовсе нѣтъ надобности обращать вниманіе на его длину и ширину; наоборотъ, желая вычислить число досокъ для настилки пола въ амбарѣ, не для чего брать во вниманіе высоты его, потому что величина пола, т. е. поверхность, зависитъ только отъ длины и ширины амбара. Когда же понадобится узнать количество овса, вмѣщающагося въ амбарѣ, тогда разсматривается объемъ, потому что количество овса будетъ въ зависимости отъ длины, ширины и высоты амбара.

§ 6. *Свойства протяженій и способы измѣренія ихъ составляютъ предметъ Геометріи.*

Для простоты, разсматриваютъ линіи независимо отъ поверхностей, а поверхности независимо отъ объемовъ. При этомъ надобно твердо помнить, что линіи и поверхности, разсматриваемыя какъ сейчасъ сказано, т. е. независимо отъ тѣла, можно представлять только въ воображеніи, и слѣдовательно линіи, проводимыя на бумагѣ или доскѣ, не составляютъ дѣйствительныхъ линій; въ самомъ дѣлѣ, какъ бы тонко ни проведена была черта карандашемъ, она имѣетъ, кромѣ длины, ширину и толстоту; слѣдовательно эта черта есть тѣло, и отнюдь не геометрическое тѣло, потому что оно состоитъ изъ вещества, именно графита; геометрическое же тѣло или объемъ есть только пространство, занимаемое тѣломъ. Тоже надобно сказать и о точкѣ, означаемой на доскѣ или на бумагѣ.

§ 7. Всякій понимаетъ, что такое прямая линія: изображеніемъ ея можетъ служить ребро вѣрной линейки. Каждый убѣжденъ и въ томъ, что *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Истина, сама по себѣ очевидная, называется *аксіомою.*

Относительно прямой линіи, мы принимаемъ за аксіомы слѣдующія ея свойства:

Аксіома 1-я.

§ 8. *Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Аксіома 2-я.

§ 9. *Между двумя точками можно провесть только одну прямую линію.*

Предложеніе*).

§ 10. *Двѣ прямыя линіи, имѣющія двѣ общія точки, сливаются на всемъ своемъ протяженіи, т. е. составляютъ одну прямую линію.*

Фиг. 1-я.

Пусть даны двѣ прямыя линіи, одна XY, другая xy. Перемѣстимъ прямую линію xy на прямую линію XY и положимъ, что точки a и b первой линіи соотвѣтственно совпали съ точками A и B второй линіи. Въ этомъ смыслѣ и говорятъ, что двѣ прямыя линіи имѣютъ двѣ общія точки. Обѣ прямыя линіи между точками A и B сольются, потому что между двумя точками A и B можно провесть только одну прямую (см. § 9).

Остается доказать, что обѣ прямыя сольются и за точками A и B. Допустимъ, что въ какой нибудь точкѣ C обѣ линіи расходятся, такъ что xy приметъ положеніе $ABCZ$. Станемъ обращать эту линію на точкѣ A такъ, чтобы одна изъ ея точекъ, напр. E, упала на прямую $ABCY$, напримѣръ въ точку D. При этомъ движеніи, всѣ точки прямой $ABCE$, кромѣ A, перемѣстятся, и тѣ изъ нихъ, которыя находились на прямой $ABCD$, отдѣлятся отъ этой линіи; и потому между точками A и D получатся двѣ прямыя линіи, что противно аксіомѣ 2-й. Такое невѣрное заключеніе получено вслѣдствіе предположенія, что прямыя линіи XY и xy, имѣя двѣ общія точки A и B, разошлись; отсюда заключаемъ, что предположеніе, будто прямыя разошлись въ точкѣ C, не вѣрно, и слѣдовательно необходимо допустить, что онѣ сливаются въ одну прямую линію.

---

*) *Предложеніе* или *теорема* есть истина, въ справедливости которой убѣждаемся рядомъ сужденій.

§ 11. *Слѣдствіе. Двумя точками опредѣляется положеніе прямой линіи.*

И дѣйствительно, если вообразимъ, что черезъ двѣ точки проведена сперва одна прямая линія, а потомъ другая, то эти двѣ прямыя линіи будутъ имѣть двѣ общія точки, а мы сейчасъ доказали, что двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, составляютъ одну прямую линію.

Примѣчаніе. Очевидно, что черезъ одну какую нибудь точку можно провесть множество прямыхъ линій, слѣдовательно одна точка не опредѣляетъ положенія прямой линіи.

Предложеніе.

§ 12. *Двѣ различныя прямыя линіи могутъ имѣть только одну общую точку.*

Дѣйствительно, еслибъ эти линіи имѣли другую общую точку, то, на основаніи предъидущаго предложенія, онѣ совмѣстились бы и составили одну прямую линію, а не двѣ различныя прямыя линіи, какъ это дано по условію.

Двѣ прямыя линіи, имѣющія одну только общую точку, называются *пересѣкающимися прямыми линіями.*

§ 13. Разстояніе между двумя точками есть опредѣленная величина, которую можно измѣрить. Съ этою цѣлью берутъ *единичную мѣру длины*, напримѣръ *аршинъ*, и укладываютъ его на измѣряемую прямую линію: если аршинъ уложится ровное число разъ, напр. 3 раза, то величина прямой равна 3-мъ аршинамъ. Если же аршинъ уложится неровное число разъ, напримѣръ 3 раза съ остаткомъ, то величину этого остатка опредѣляютъ числомъ *вершковъ*; съ этою цѣлью приставляютъ къ остатку аршинъ, раздѣленный на вершки: пусть этотъ остатокъ содержитъ ровно 7 вершковъ; тогда величина прямой равна 3-мъ аршинамъ $+7$ вершковъ. Если же остатокъ не содержитъ въ себѣ ровное число вершковъ, а напримѣръ 7 вершковъ съ остаткомъ, то этотъ послѣдній остатокъ опредѣляютъ въ частяхъ вершка, прикинувъ къ нему вершокъ, раздѣленный на равныя части: если онъ занимаетъ 3 части вершка, раздѣленнаго на 4 равныя части, то онъ равенъ $^3/_4$ вершка, а вся линія 3 арш. $+7^3/_4$ вершка.

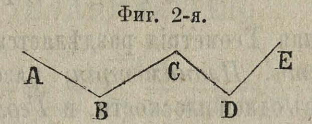
Примѣчаніе. Величина прямой линіи между двумя точками, выраженная въ линейной единицѣ, называется *длиною* прямой

линіи. Если, говоря о прямой линіи, ничего не сказано объ ея *длинѣ*, то надобно разумѣть эту прямую линію, продолженною неопредѣленно въ обѣ стороны.

Двѣ прямыя линіи называются равными, если при наложеніи, одной на другую, концы ихъ совмѣщаются.

§ 14. *Ломанною линіею* называется послѣдовательное соеди-

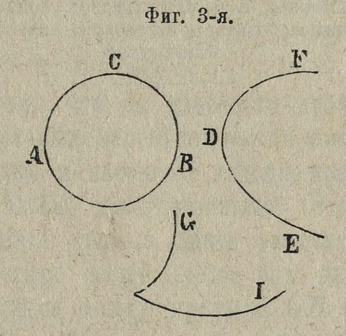
Фиг. 2-я.



неніе нѣсколькихъ прямыхъ. Напр. *ABCDE* есть ломанная линія; она состоитъ изъ прямыхъ *AB*, *BC*, *CD* и *DE*.

§ 15. *Кривою линіею* называется всякая линія не прямая и

Фиг. 3-я.



не состоящая изъ прямыхъ линій. Напр. *ABC*, *EDF*, *GI* суть кривыя линіи.

§ 16. Между двумя точками, какъ извѣстно, можно провесть только одну прямую (см. § 9); ломанныхъ же и кривыхъ линій можно провести сколько угодно; самая меньшая изъ этихъ линій будетъ прямая, потому что прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками (см. § 8).

§ 17. *Плоскость есть поверхность такого свойства, что прямыя линіи, проведенныя черезъ всякія двѣ ея точки, всѣми своими точками лежатъ на этой поверхности* *).

---

*) Поэтому, чтобы удостовѣриться, дѣйствительно ли поверхность тѣла есть плоскость, надобно прикладывать къ ней край вѣрной линейки, въ разныхъ направленіяхъ, и смотрѣть, вездѣ ли ребро плотно прилегаетъ къ поверхности.

Говоря о плоскости, надобно разумѣть, что она продолжена во всѣ стороны сколько угодно, безконечно.

Изъ предъидущаго опредѣленія слѣдуетъ, что прямая линія, проведенная черезъ какія нибудь двѣ точки, взятыя на плоскости, на всемъ своемъ протяженіи совмѣщается съ плоскостью.

§ 18. Всякая поверхность, не прямая и не состоящая изъ прямыхъ поверхностей, называется *кривою поверхностью*.

§ 19. Начальная Геометрія раздѣляется на двѣ части: *Геометрія на плоскости*, *Планиметрія*, разсматривающая протяженія, находящіяся въ одной плоскости, и *Геометрія въ пространствѣ*, *Стереометрія*, въ которой разсматриваются протяженія не совмѣщающіяся съ плоскостью, какъ напримѣръ объемы.

~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~

ЧАСТЬ I.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

(ПЛАНИМЕТРІЯ).

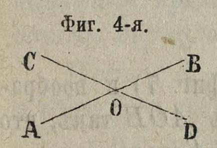
ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Углы, линіи перпендикулярныя, наклонныя и параллельныя.

2. Уголъ; сравненіе, сложеніе и вычитаніе угловъ.—Углы смежные. Прямой уголъ, перпендикуляръ, линія наклонная.—Сумма угловъ по одну сторону прямой.—Углы: острый, прямой, дополнительный до одного и до двухъ прямыхъ.—Сумма угловъ около точки.—Равенство противоположныхъ угловъ.—Обратное предложеніе.

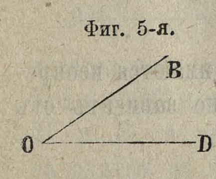
§ 20. Вообразимъ, что на плоскости проведены двѣ прямыя линіи AB и CD, которыя пересѣкаются въ точкѣ O; какъ линіи, такъ и плоскость надобно представлять неопредѣленно продолженными. Эти двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи раздѣляютъ плоскость на четыре части: одна изъ нихъ будетъ заключаться между прямыми OB и OD, другая — между прямыми OB и OC, третья — между OC и OA, четвертая — между OA и OD. Каждая изъ этихъ частей называется *угломъ*.

Фиг. 4-я.



И такъ, *угломъ называется неопредѣленная часть плоскости между двумя пересѣкающимися прямыми, ограниченными въ ихъ точкѣ пересѣченія.* Эта точка называется *вершиною* угла, а обѣ прямыя — *боками* или *сторонами* его. Поэтому точка O — вершина угла BOD; OB и OD — его бока. Уголъ обыкновенно означается тремя буквами, написанными сряду, такимъ образомъ, что вершинная буква ставится всегда въ серединѣ; поэтому уголъ читается такъ: BOD или DOB. Если при вершинѣ находится только одинъ уголъ, то короче будетъ назвать его только одною вершинною буквою, т. е. вмѣсто угла BOD сказать уголъ O.

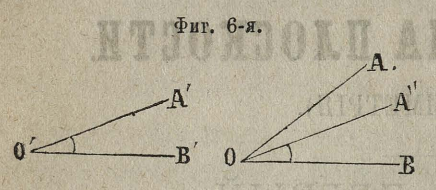
Фиг. 5-я.



Прим. Для краткости, чтобы означить уголъ часто употребляютъ знакъ ∠; такъ, вмѣсто уголъ *BOD*, пишутъ ∠*BOD*.

§ 21. Если назначимъ какую нибудь точку *A''* (фиг. 6) въ углѣ *AOB* и соединимъ ее съ вершиною *O*, то получимъ два новые угла *A''OA* и *A''OB*; каждый изъ этихъ угловъ составляетъ часть угла *AOB*. Если бы внутри *A''OA* назначили какую нибудь точку и соединили ее съ вершиною O, то получили бы два угла, изъ которыхъ каждый составлялъ бы часть угла *A''OA*, и вмѣстѣ съ тѣмъ онъ былъ бы частью угла *AOB* и т. д. Отсюда заключаемъ, что всякій уголъ можно представить себѣ состоящимъ изъ другихъ угловъ, составляющихъ его части; поэтому уголъ есть величина, потому что величиною называется все, что можно представить себѣ состоящимъ изъ частей*). Такъ какъ всякая величина болѣе своей части, то имѣемъ уголъ ∠*AOB* > ∠*A''OA*, ∠*AOB* > ∠*A''OB*. Уголъ *AOB* составляется изъ двухъ его частей: угла *A''OA* и угла *A''OB*, слѣдовательно уголъ *AOB* равенъ суммѣ угловъ *A''OA* и *A''OB*, что можно выразить такъ:

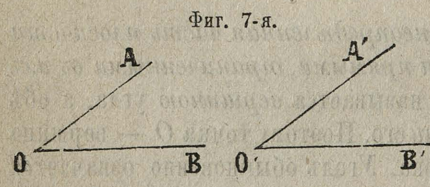
Фиг. 6-я.



$$\angle AOB = \angle A''OA + \angle A''OB.$$

§ 22. Возьмемъ два угла *AOB*, *A'O'B'* (фиг. 7) и вообразимъ, что уголъ *A'O'B'* перемѣщенъ на уголъ *AOB* такъ, что вершина *O'* совпала съ вершиною *O* и бокъ *O'A'* направленъ по боку *OA*; если при этомъ бокъ *O'B'* приметъ направленіе (пойдетъ) по боку *OB*, то уголъ *A'O'B'* будетъ равенъ углу *AOB*, говорятъ, что уголъ *A'O'B'* *совмѣстился* съ угломъ *AOB*. Поэтому *два угла называются равными между собою, если бока одного угла совмѣщаются съ боками другого угла.* Очевидно, что при совмѣщеніи боковъ двухъ угловъ необходимо совмѣщаются и вершины этихъ угловъ.

Фиг. 7-я.



Надо помнить, что бока угловъ всегда принимаются неопредѣленно продолженными, и что величина угла не зависитъ отъ

*) См. Ариѳметику Ф. Симашко, 8-е изданіе, 1885 г.

величины его боковъ; чертежъ показываетъ только направленіе боковъ, а для этой цѣли короткій бокъ такъ же достаточенъ, какъ и длинный.

§ 23. Чтобы сравнить два угла AOB и $A'O'B'$ (фиг. 6), т. е. узнать, будутъ ли они равные, или, въ случаѣ неравенства, который больше,—вообразимъ, что уголъ $A'O'B'$ перемѣщенъ на AOB такъ что вершина O' совпала съ вершиною O и бокъ $O'B'$—съ бокомъ OB: смотря по тому, гдѣ ляжетъ бокъ $O'A'$, внутри ли угла AOB, или внѣ его, заключаемъ, что уголъ $A'O'B'$, въ первомъ случаѣ, меньше угла AOB, а во второмъ больше его; если же бокъ $O'A'$ совмѣстится съ бокомъ OA, то углы $A'O'B'$ и AOB равны между собою.

Въ этомъ состоитъ *сравненіе* двухъ угловъ.

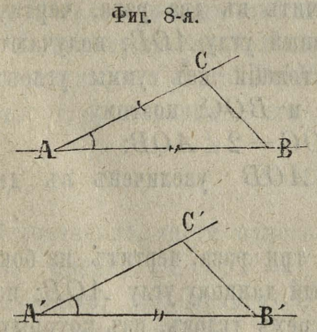
Предложеніе.

§ 24. *Если на бокахъ какого нибудь угла отложить отъ вершины произвольныя части и такія же части отложить отъ вершины другого угла, равнаго первому, а точки отложенія соединить между собою въ каждомъ углѣ, то эти соединяющія прямыя будутъ равны между собою и съ равными боками образуютъ соотвѣтственно равные углы.*

Пусть $\angle A = \angle A'$ (фиг. 8); отложимъ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и проведемъ прямыя BC и $B'C'$; надо доказать, что

$$BC = B'C',\ \angle ABC = \angle A'B'C' \text{ и } \angle ACB = \angle A'C'B'.$$

Фиг. 8-я.

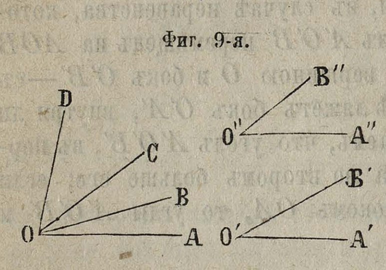


Наложимъ уголъ A' на уголъ А такъ, чтобы вершина A' совпадала съ вершиною A и бокъ $A'B'$ пошелъ бы по боку AB; по равенству $AB = A'B'$, точка B' совпадаетъ съ точкою B; по равенству угловъ A и A', бокъ $A'C'$ пойдетъ по боку AC, а по равенству $A'C' = AC$, точка C' совпадетъ съ точкою C. И такъ концы прямой $B'C'$ совпали съ концами прямой BC, слѣдовательно и самыя прямыя совмѣстятся (§ 9), значитъ $BC = B'C'$. Углы ABC и $A'B'C'$ равны между собою потому, что ихъ вершины B' и B, а также и бока совмѣстились; именно: вершина B' находится въ B, бокъ $B'A'$ совмѣстился съ бокомъ BA, и другой

бокъ $B'C'$ совпалъ съ бокомъ BC. Также объясняется, что $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

§ 25. Два угла, и вообще нѣсколько угловъ, можно соединить въ одинъ уголъ. Пустъ требуется три угла AOB, $A'O'B'$ и $A''O''B''$ соединить въ одинъ уголъ. Перемѣстимъ уголъ O' такъ, чтобы вершина его совпадала съ вершиною O, а бокъ $O'A'$ съ OB угла AOB; и пусть другой бокъ $O'B'$ приметъ положеніе OC такъ, что $\angle BOC = \angle O'$. Ясно, что уголъ AOC равенъ суммѣ угловъ AOB и $A'O'B'$. Перемѣстимъ уголъ O'' такъ, чтобы его вершина O'' и бокъ $O''A''$ совпали съ точкою O и прямою OC, и пусть другой бокъ $O''B''$ приметъ положеніе OD; слѣдовательно $\angle COD = \angle O''$. Очевидно, что уголъ AOD, равный суммѣ угловъ AOB, BOC и COD, равенъ суммѣ данныхъ угловъ AOB, O' и O'', что можно написать такъ:

Фиг. 9-я.



$$\angle AOD = \angle AOB + \angle A'O'B' + \angle A''O''B''.$$

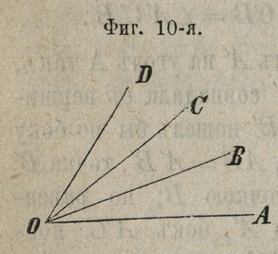
Въ этомъ состоитъ *совокупленіе* или *сложеніе угловъ*.

§ 26. Чтобы уголъ увеличить въ нѣсколько разъ, поступаютъ какъ при сложеніи угловъ; причемъ всѣ слагаемые будутъ равны данному углу. Напримѣръ, чтобы уголъ AOB (фиг. 10) увеличить въ два раза, чертятъ уголъ BOC, равный углу AOB; получаютъ уголъ AOC, состоящій изъ суммы угловъ, равныхъ AOB и BOC; поэтому

$$\angle AOC = 2\angle AOB;$$

значитъ уголъ AOB увеличенъ въ два раза.

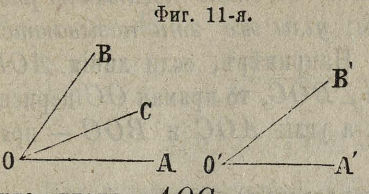
Фиг. 10-я.



Чтобы уголъ AOB увеличить въ три раза, чертятъ на бокѣ OC при вершинѣ O уголъ COD, равный данному углу AOB; получимъ уголъ AOD, состоящій изъ трехъ угловъ, изъ которыхъ каждый равенъ данному углу AOB; слѣд. уголъ $AOD = 3\angle AOB$, и такимъ образомъ уголъ AOB увеличенъ въ три раза и т. д. Въ этомъ состоитъ *умноженіе угловъ*.

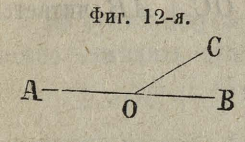
§ 27. Чтобы изъ угла AOB вычесть уголъ $A'O'B'$, перемѣстимъ уголъ O' такъ, чтобы его вершина и бокъ $O'B'$ совпали съ вершиною O и бокомъ OB угла AOB, и пусть другой бокъ $O'A'$ приметъ положеніе OC; слѣдовательно $\angle BOC = \angle O'$; очевидно, что уголъ AOC составитъ разность между углами AOB и $A'O'B'$, что можно написать такъ:

Фиг. 11-я.



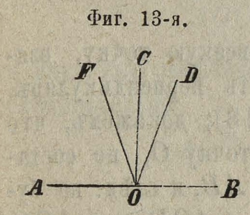
$$AOB - \angle A'O'B' = \angle AOC.$$

Фиг. 12-я.



§ 28. Если прямую линію AB встрѣчаетъ другая прямая OC, не переходя за точку пересѣченія O, то образуются два угла AOC и BOC, которые называется *смежными углами*.

Фиг. 13-я.



§ 29. Проведемъ прямую линію AB и назначимъ на ней произвольную точку O, черезъ которую проведемъ прямую OD въ произвольномъ направленіи: получимъ два смежные угла AOD и BOD; положимъ, что уголъ AOD больше угла DOB.

На прямой OA, при точкѣ O, нанесемъ уголъ AOF, равный углу BOD; при чемъ замѣтимъ, что прямая OF пойдетъ въ углѣ AOD, потому что мы положили уголъ AOD большимъ угла BOD. Вообразимъ, что уголъ DOF прямою OC раздѣленъ на двѣ равныя части; т. е. полагаемъ, что $\angle COF = \angle COD$. Понятно, что

$$\angle AOC = \angle BOC;$$

дѣйствительно, части одного угла порознь равны частямъ другого угла, именно: $\angle AOF = \angle BOD$, $\angle FOC = \angle DOC$. Отсюда заключаемъ, что прямая OC составляетъ два равные смежные угла съ прямою AB. И такъ, всегда можно вообразить такую прямую, которая съ другою прямою образуетъ два равные смежные угла. Эти равные смежные углы AOC и BOC называются *прямыми углами*, а линія OC называется *перпендикуляромъ* къ линіи AB.

И такъ, *прямая линія называется перпендикулярною къ другой прямой, если она составляетъ съ этою послѣднею равные смежные углы; углы же эти называются прямыми углами.* Напримѣръ, если линія AOB прямая и $\angle AOC = \angle BOC$, то прямая OC перпендикулярна къ AB, а углы AOC и BOC — прямые углы.

Фиг. 14-я.

Точка O, составляющая пересѣченіе перпендикуляра OC съ прямою AB, называется *основаніемъ* перпендикуляра.

Примѣчаніе. Чтобы означить перпендикуляръ, для краткости, употребляютъ знакъ $\perp$; напримѣръ $OC \perp AB$ читается OC перпендикулярна къ AB.

Предложеніе.

§ 30. *Изъ всякой точки, взятой на прямой линіи, можно провесть къ ней (возставить) перпендикуляръ, притомъ только одинъ.*

Мы уже замѣтили (§ 29), что черезъ всякую точку, взятую на прямой линіи, можно къ ней провесть перпендикуляръ. Пусть OC перпендикулярна къ AB, (фиг. 13); докажемъ, что всякая другая прямая OD, проведенная черезъ точку O, не составитъ равныхъ смежныхъ угловъ съ прямой AB, и слѣд. не будетъ перпендикулярна къ AB. Дѣйствительно, $\angle AOD > \angle AOC$, но, по условію, прямая OC перпендукулярна къ AB, значитъ $\angle AOC = \angle BOC$ и поэтому $\angle AOD > \angle BOC$; очевидно, что $\angle BOC > \angle BOD$; изъ послѣднихъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ, что

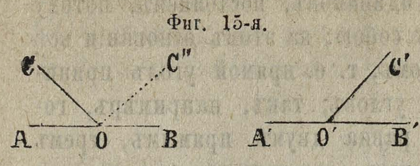
$$\angle AOD > \angle BOD.$$

И такъ прямая OD не перпендикулярна къ AB. Все сказанное о прямой OD относится и ко всякой прямой, кромѣ перпендикуляра OC, проведеннаго черезъ точку O; отсюда заключаемъ, что черезъ точку, взятую на прямой, можно провести къ ней одинъ только перпендикуляръ.

Предложеніе.

§ 31. *Сумма смежныхъ угловъ есть величина постоянная, т. е. сумма одной пары смежныхъ угловъ равна суммѣ всякой другой пары смежныхъ угловъ.*

Фиг. 15-я.



Возьмемъ двѣ пары смежныхъ угловъ, происшедшихъ отъ пересѣченій прямыхъ AB и $A'B'$ съ прямыми OC и $O'C'$, и докажемъ, что

$$\angle AOC + \angle COB = \angle A'O'C' + \angle C'O'B'.$$

Наложимъ плоскость $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы точка O' совпала съ O, и прямая $A'B'$ слилась съ прямою AB; тогда $O'C'$ приметъ такое положеніе OC', что

$$\angle C''OB = \angle C'O'B' \text{ и } \angle AOC'' = \angle A'O'C'.$$

Въ суммѣ двухъ угловъ AOC и COB, этотъ послѣдній уголъ можно замѣнить суммою двухъ угловъ COC'' и $C''OB$. И такъ

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOC + \angle COC'' + \angle C''OB;$$

но сумму угловъ $AOC + COC''$ можно замѣнить однимъ угломъ AOC''; слѣдовательно

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOC'' + \angle C''OB;$$

а какъ уже замѣчено, что $\angle AOC'' = \angle A'O'C'$ и $\angle C''OB = \angle C'O'B'$; слѣдовательно

$$\angle AOC + \angle COB = \angle A'O'C' + \angle C'O'B'.$$

Предложеніе.

§ 32. *Всѣ прямые углы равны между собою.*

Пусть прямая OC перпендикулярна къ AB, и $O'C'$ перпендикулярна къ прямой $A'B'$; надобно доказать, что уголъ AOC равенъ углу $A'O'C'$.

Фиг. 16-я.

Мы доказали (§ 31), что сумма одной пары смежныхъ угловъ AOC и COB равна суммѣ всякой другой пары смежныхъ угловъ $A'O'C'$ и $C'O'B'$, т. е.

$$\angle AOC + \angle COB = \angle A'O'C' + \angle C'O'B'.$$

Вслѣдствіе перпендикулярности прямой OC къ AB, углы AOC и COB равны между собою (§ 29), и каждый изъ нихъ прямой; то же скажемъ и объ углахъ $A'O'C'$ и $C'O'B'$; слѣд. $2\angle AOC = 2\angle A'O'C'$, отсюда $\angle AOC = \angle A'O'C'$.

Прим. Прямой уголъ вездѣ одинаковъ, постояненъ, потому что всѣ прямые углы равны между собою; на этомъ основанiи всѣ углы сравниваютъ съ прямымъ угломъ, т. е. прямой уголъ принимаютъ за единицу при измѣренiи угловъ; такъ, напримѣръ, говорятъ: сумма такихъ-то угловъ равна двумъ прямымъ, тремъ прямымъ и т. д. или такой-то уголъ составляетъ $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. прямаго угла.

Прямой уголъ, для краткости, будемъ означать буквою d; поэтому $2d$ означаетъ два прямыхъ угла, $3d$ — три прямыхъ угла, $\frac{1}{2}d$ — половину прямаго угла и т. д.

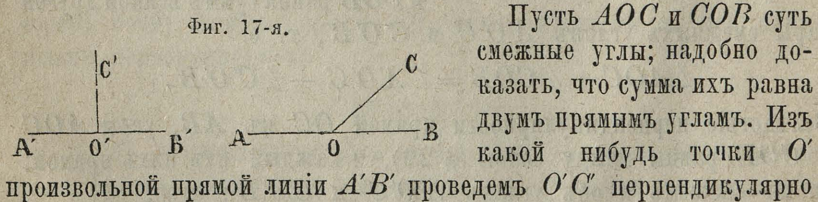
§ 33. Всякiй уголъ, который меньше прямаго, называется *острымъ* угломъ; а уголъ, который больше прямаго и меньше двухъ прямыхъ, называется *тупымъ*. Напримѣръ $\angle AOC$ — острый уголъ (фиг. 15), $\angle COB$ — тупой.

§ 34. Въ суммѣ двухъ угловъ, составляющей два прямые, каждый изъ слагаемыхъ угловъ называется *дополненiемъ* другого угла до двухъ прямыхъ. Легко понять, что *два угла равны между собою, если они имѣютъ равныя дополненiя до двухъ прямыхъ*. И дѣйствительно, если углы a и b имѣютъ равныя дополненiя, которыя назовемъ одною буквою c, то получимъ $a+c=b+c$, потому что каждая сумма равна 2 прямымъ; изъ этого равенства получимъ $a=b$.

§ 35. Въ суммѣ двухъ угловъ, составляющей прямой уголъ, каждый изъ слагаемыхъ угловъ называется *дополненiемъ* другого угла до прямаго. Ясно, что *два угла равны между собою, если имѣютъ равныя дополненiя до прямаго;* объясненiе тоже самое, что и въ предъидущемъ параграфѣ.

Предложенiе.

§ 36. *Сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*



Фиг. 17-я.

Пусть AOC и COB суть смежные углы; надобно доказать, что сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ. Изъ какой нибудь точки O' произвольной прямой линiи $A'B'$ проведемъ $O'C'$ перпендикулярно къ $A'B'$: получимъ прямые углы $A'O'C'$ и $C'O'B'$ (§ 29); сумма

ихъ составитъ два прямые. А какъ сумма смежныхъ AOC и COB равна суммѣ другихъ смежныхъ угловъ $A'O'C'$ и $C'O'B'$ (§ 31), то $\angle AOC + \angle COB = 2$ прямымъ угламъ.

Предложенiе.

§ 37. *Сумма всѣхъ послѣдовательныхъ угловъ, имѣющихъ общую вершину и лежащихъ по одну сторону прямой, равна двумъ прямымъ угламъ.*

Пусть AOB означаетъ прямую линiю; надо доказать, что

$$\angle AOE + \angle EOD + \angle DOC + \angle COB = 2d.$$

Фиг. 18-я.

Мы уже доказали въ предъидущемъ предложенiи, что сумма смежныхъ угловъ, напр. AOE и EOB, равна 2-мъ прямымъ; но $\angle EOB = \angle EOD + \angle DOC + \angle COB$, слѣдовательно

$$\angle AOE + \angle EOD + \angle DOC + \angle COB = 2d.$$

Предложенiе.

§ 38. *Изъ двухъ взаимно-дополнительныхъ угловъ до двухъ прямыхъ угловъ можно составить смежные углы*, т. е. *когда у двухъ взаимно-дополнительныхъ угловъ до двухъ прямыхъ есть общая вершина и общiй бокъ, тогда другiе ихъ бока составляютъ прямую линiю.*

Пусть углы AOB и $A'O'B'$ взаимно-дополнительные до 2-хъ прямыхъ. Продолживъ прямую AO, получимъ уголъ BOC, смежный съ AOB и служащiй дополненiемъ до двухъ прямыхъ углу AOB (§ 36). По условiю, уголъ $A'O'B'$ также дополняетъ AOB до двухъ прямыхъ; поэтому $\angle A'O'B' = \angle BOC$ (§ 34). Теперь, если мы перемѣстимъ уголъ $A'O'B'$ такъ, чтобы вершина его O' совпала съ O, а бокъ $O'B'$ съ OB, то, по равенству угловъ $A'O'B'$ и BOC, другой бокъ $O'A'$ пойдетъ по OC, такимъ образомъ бока OA и $O'A'$ составятъ прямую линiю, и слѣд. углы AOB и $A'O'B'$ сдѣлаются смежными.

Фиг. 19-я.

Предложеніе.

§ 39. *Сумма всѣхъ послѣдовательныхъ угловъ, имѣющихъ одну общую вершину, равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Надобно доказать, что сумма угловъ AOB, BOC, COD и DOA равна четыремъ прямымъ угламъ.

Фиг. 20-я.

Продолжимъ какой нибудь бокъ, наприм. OA, и пусть OE составляетъ это продолженіе. Сумма угловъ по одну сторону прямой AE равна двумъ прямымъ (§ 37); слѣдовательно

$$\angle AOB + \angle BOE = 2d;$$

по той же причинѣ $\angle AOD + \angle DOC + \angle COE = 2d$; сложимъ эти равенства и замѣнимъ въ суммѣ два угла BOE и COE однимъ угломъ BOC; тогда получимъ

$$\angle AOB + \angle AOD + \angle DOC + \angle BOC = 4d.$$

§ 40. Мы уже видѣли, что двѣ пересѣкающіяся прямыя образуютъ четыре угла; изъ нихъ для каждаго угла, напр. AOC, есть два смежные: AOD и COB, и одинъ *противоположный* уголъ или *перемежный*: BOD. Для угла BOC противоположный будетъ AOD. И такъ *два угла называются противоположными или перемежными, если бока одного изъ нихъ составляютъ продолженіе боковъ другого.*

Фиг. 4-я.

Предложеніе.

§ 41. *Противоположные углы равны между собою.*

Надобно доказать, что $\angle AOC = \angle BOD$ и $\angle AOD = \angle BOC$. Углы AOC и AOD суть смежные, слѣдов. каждый изъ нихъ служитъ дополненіемъ другому до 2-хъ прямыхъ (§ 36); углы BOD и AOD также смежные, слѣд. составляютъ дополненіе другъ другу до 2-хъ прямыхъ. И такъ два угла AOC и BOD, имѣя одно и то же дополненіе уголъ AOD до 2-хъ прямыхъ, равны между собою (§ 34).

Предложеніе (обратное).

§ 42. *Если четыре угла, имѣющіе общую вершину, черезъ одинъ равны между собою, то они противоположные.*

Пусть $\angle AOC = \angle BOD$ и $\angle AOD = \angle BOC$; надо доказать, что линіи AOB и COD суть прямыя линіи (фиг. 4).

Сумма всѣхъ послѣдовательныхъ угловъ, имѣющихъ общую вершину, равна 4-мъ прямымъ угламъ (§ 39), слѣдовательно

$$\angle AOC + \angle COB + \angle BOD + \angle AOD = 4d;$$

поставивъ въ это равенство, вмѣсто BOD и AOD, соотвѣтственно имъ равные углы, по условію, AOC и COB, получимъ

$$2\angle AOC + 2\angle COB = 4d;$$

раздѣливъ обѣ части этого равенства на 2, имѣемъ

$$\angle AOC + \angle COB = 2d.$$

Итакъ углы AOC и COB взаимно-дополнительны до двухъ прямыхъ угловъ, притомъ они имѣютъ общую вершину O и общій бокъ OC, слѣд. другіе ихъ бока OA и OB составляютъ одну прямую AOB (§ 38).

Такъ же докажемъ, что бока OC и OD составляютъ одну прямую COD.

Свойства перпендикуляра и наклонныхъ.

3. Линіи взаимно-перпендикулярныя. — Свойства наклонныхъ, встрѣчающихъ сѣкущую въ равныхъ и неравныхъ разстояніяхъ отъ основанія перпендикуляра. — Разстояніе отъ точки до прямой линіи. — Геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ.

Предложеніе.

§ 43. *Если прямая перпендикулярна къ другой прямой, то и продолженіе ея перпендикулярно къ той же прямой.*

Фиг. 21-я.

Пусть OC перпендикулярна къ AB, а OD составляетъ продолженіе прямой OC; надобно доказать, что $OD \perp AB$.

Двѣ пересѣкающіяся линіи составляютъ равные противоположные углы (§ 41), слѣдовательно

$$\angle AOD = \angle BOC$$
$$\text{и } \angle BOD = \angle AOC,$$

а по равенству прямыхъ угловъ BOC и AOC заключаемъ, что $\angle AOD = \angle BOD$, т. е. два смежные угла AOD и BOD равны между собою, слѣд. они прямые, а линія OD перпендикулярна къ AB (§ 29).

Предложеніе.

§ 44. *Два перпендикуляра, проведенные къ одной прямой черезъ какую нибудь ея точку, по объимъ ея сторонамъ, составляютъ одну и ту же прямую.*

Пусть $OC \perp AB$ и $OD \perp AB$ (фиг. 21); докажемъ, что линія COD — прямая. По условію, углы COB и DOB — прямые, слѣд. сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ; значитъ линія COD — прямая (§ 38).

Предложеніе.

§ 45. *Если прямая перпендикулярна къ другой прямой, то и эта послѣдняя перпендикулярна къ первой.*

Положимъ, что $CD \perp AB$ (фиг. 21); надобно доказать, что $AB \perp CD$.

Уголъ AOD равенъ своему противоположному BOC, а какъ этотъ послѣдній прямой, то уголъ AOD прямой; уголъ AOC также прямой, потому что CD перпендикулярна къ AB; слѣдовательно смежные углы AOC и AOD равны между собою (§ 32), и OA, а слѣдовательно и ея продолженіе OB перпендикулярно къ CD (§§ 29, 43).

Поэтому, двѣ прямыя AB и CD называются *взаимно-перпендикулярными.*

Предложеніе.

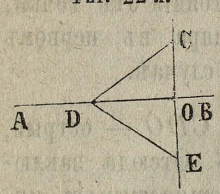
§ 46. *Изъ всякой точки, взятой внѣ прямой линіи, можно всегда опустить на нее перпендикуляръ, и притомъ только одинъ.*

1) Пусть требуется провести перпендикуляръ изъ точки C къ прямой линіи AB (фиг. 22).

Произвольную точку D прямой линіи AB соединимъ съ данною точкою C; получимъ два смежные угла; если они равны

между собою, то прямая CD будетъ перпендикулярна къ AB (§ 29). Положимъ, что эти углы не равны, напримѣръ: CDB меньше ADC. Построимъ уголъ BDE, равный углу CDB, и отложимъ DE, равное DC; наконецъ, соединимъ точку E съ данною точкою C; полученная такимъ образомъ прямая CE будетъ перпендикулярна къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, на бокахъ равныхъ угловъ BDE и BDC отложены равныя части $DE = DC$ и $DO = DO$; поэтому прямыя OE и OC, соединяющія точки отложенія, составятъ равные углы съ равными боками: съ DO угла BDE и съ DO угла CDB (§ 24), т. е. $\angle DOE = \angle DOC$. И такъ, прямая AO составляетъ равные смежные углы съ CE, значитъ AO перпендикулярна къ CE (§ 29), и CE перпендикулярна къ AB (§ 45).

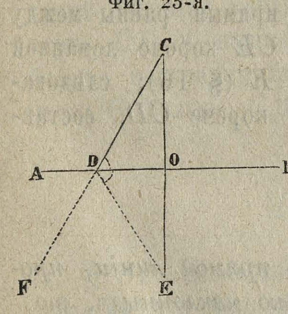
Фиг. 22-я.



И такъ, мы доказали, что изъ всякой точки C, взятой внѣ прямой AB, можно опустить на нее перпендикуляръ.

2) Пусть прямая CO перпендикулярна къ AB; надобно доказать, что всякая другая прямая CD, проведенная изъ точки C къ прямой AB, будетъ наклонная. Продолжимъ перпендикуляръ CO и, отложивъ OE, равную OC, соединимъ прямою точку E съ точкою D. По условію CO перпендикулярна къ AB, поэтому и AO перпендикулярна къ CE (§ 45); слѣд. углы DOE и DOC равны между собою. На бокахъ этихъ угловъ отложены равныя части $OE = OC$, $OD = OD$, и точки отложенія соединены прямыми DE и DC, которыя съ равными боками $OD = OD$ составляютъ равные углы $ODE = ODC$ (§ 24); эти два угла съ угломъ EDF всѣ три въ суммѣ составятъ два прямыхъ угла (§ 37); слѣд. сумма угловъ $ODE + ODC$ или $2\angle ODC$ меньше двухъ прямыхъ; а отсюда заключаемъ, что уголъ ODC меньше прямаго угла; смежный ему уголъ ADC будетъ больше прямаго угла (§ 36). И такъ, прямая CD съ прямою AB составляетъ неравные углы: значитъ CD неперпендикулярна къ прямой AB.

Фиг. 23-я.



§ 47. Прямая, соединяющая какую нибудь точку, взятую внѣ прямой, съ какою ни есть точкою этой прямой, называется

наклонною, если эти линіи составятъ неравные смежные углы; а общая точка этихъ линій называется *основаніемъ* наклонной.

Впослѣдствіи, говоря о *перпендикулярной* и *наклонной прямой*, мы будемъ разумѣть опредѣленныя разстоянія отъ точки, взятой внѣ прямой, до основанія перпендикуляра въ первомъ случаѣ, и до основанія наклонной во второмъ случаѣ.

§ 48. Мы видѣли, (§ 46, 2-е), что уголъ CDO — острый, при условіи, что CO перпендикулярна къ AB. Отсюда заключаемъ, что *изъ двухъ неравныхъ угловъ, составленныхъ наклонною, тотъ уголъ острый, въ отверстіи котораго лежитъ перпендикуляръ.*

Предложеніе.

§ 49. *Если изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, провесть къ ней перпендикуляръ и наклонную, то перпендикуляръ короче наклонной.*

Пусть CO перпендикулярна къ AB (фиг. 22), а CD наклонная; надобно доказать, что CO меньше CD. Продолжимъ перпендикуляръ CO и отложимъ $OE = OC$, точку E соединимъ съ D. Углы COD и DOE равны между собою (§ 45); на бокахъ ихъ отложены равныя части отъ вершины O, именно $OC = OE$, $OD = OD$, то соединяющія прямыя равны между собою, $DC = DE$ (§ 24). Прямая линія CE короче ломанной CDE, проведенной между точками C и E (§ 16); слѣдовательно CO, какъ половина CE, будетъ короче CD, составляющей также половину ломанной CDE.

Предложеніе.

§ 50. *Если изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, проведены къ ней перпендикуляръ и нѣсколько наклонныхъ, то*

1) тѣ наклонныя, которыхъ основанія равно-отстоятъ отъ основанія перпендикуляра, равны между собою и составляютъ равные углы съ прямой;

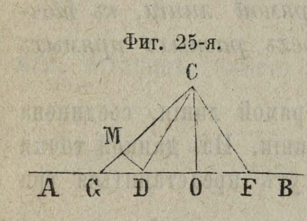
2) изъ двухъ наклонныхъ, основанія которыхъ неравно удалены отъ основанія перпендикуляра, та больше, которой основаніе отстоитъ дальше отъ основанія перпендикуляра.

1) Возьмемъ точку C внѣ прямой AB и проведемъ перпендикуляръ CO къ прямой AB. Отъ точки O, *основанія* пер-

пендикуляра, отложимъ равныя части $OD = OF$; наконецъ проведемъ наклонныя CD и CF; надобно доказать, что $CD = CF$. По условію углы COF и COD равны между собою; на бокахъ ихъ отложены равныя части $OD = OF$, $OC = OC$; точки отложенія соединены прямыми CD и CF; слѣд. эти прямыя равны между собою, т. е. $CD = CF$, и съ равными боками составляютъ равные углы $CDO = CFO$ (§ 24).

Фиг. 24-я.

2) Пусть CO перпендикулярна къ AB, и OG больше OF; надобно доказать, что наклонная CG больше наклонной CF. Отложимъ $OD = OF$; при этомъ точка D необходимо упадетъ между O и G, потому что OG больше OF; проведемъ наклонную CD, которая равна CF, ибо ихъ основанія равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра. И такъ докажемъ, что CG больше наклонной CD. Съ этою цѣлью возставимъ перпендикуляръ DM изъ точки D къ прямой CD; онъ пойдетъ внутри угла ADC, потому что этотъ послѣдній есть тупой уголъ (§ 48); значитъ этотъ перпендикуляръ, проходя въ углѣ ADC, пересѣчетъ наклонную CG въ нѣкоторой точкѣ M. Изъ точки C къ прямой DM проведенъ перпендикуляръ CD и наклонная CM; слѣдовательно наклонная CM больше перпендикуляра CD и подавно CG больше CD, потому что CG больше CM.



Фиг. 25-я.

Предложеніе (обратное).

§ 51. *Если изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, проведены къ ней перпендикуляръ и наклонныя, то*

1) *Основанія двухъ равныхъ наклонныхъ равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра;*

2) *Изъ двухъ неравныхъ наклонныхъ основаніе большей дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.*

1) Пусть $CO \perp AB$ и $CF = CD$ (фиг. 24); надо доказать, что $OF = OD$. Допустимъ, что OF не равна OD, напримѣръ пусть OF больше OD; изъ этого предположенія слѣдуетъ, что CF больше CD (§ 50, 2-е), а это противно условію, по которому $CF = CD$;

и такъ нельзя допустить неравенство разстояній OF и OD, слѣд. $OF = OD$.

2) Пусть $CO \perp AB$ и наклонная CG больше наклонной CF (фиг. 25); надо доказать, что OG больше OF. Нельзя допустить, что $OG = OF$, ибо вслѣдствіе этого допущенія, на основаніи § 50, 1-е, имѣли бы $CG = CF$, что противно условію. Нельзя допустить также, что OG меньше CF; дѣйствительно, при этомъ предположеніи, на основаніи § 50, 2-е, имѣли бы CG меньше CF, что противно условію. И такъ OG не можетъ быть ни равна, ни меньше разстоянія OF, слѣд. OG больше OF.

Предложеніе.

§ 52. *Изъ точки, взятой внѣ прямой линіи, къ точкамъ этой прямой нельзя провесть трехъ равныхъ прямыхъ линій.*

Положимъ, что точка, взятая внѣ прямой линіи, соединена съ какими нибудь тремя точками этой линіи. Изъ данной точки опустимъ перпендикуляръ на прямую; могутъ представиться три случая.

1) Перпендикуляръ совпадаетъ съ одною изъ упомянутыхъ трехъ линій, тогда эта линія будетъ короче остальныхъ двухъ (§ 49);

2) двѣ линіи будутъ по одну сторону перпендикуляра, слѣдовательно онѣ не равны (§ 50, 2-е);

3) всѣ три линіи придутся по одну сторону перпендикуляра, слѣдовательно всѣ три будутъ различной длины (§ 50, 2-е).

§ 53. *Разстояніе отъ точки до прямой измѣряется перпендикуляромъ, проведеннымъ изъ этой точки къ прямой*; потому что изъ точки на прямую можно опустить одинъ только перпендикуляръ, и онъ короче всякой прямой линіи, соединяющей эту точку со всякою точкою прямой (§ 49).

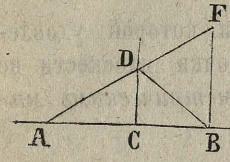
Предложеніе.

§ 54. *Всякая точка перпендикуляра, возстановленнаго изъ середины прямой, равно-отстоитъ отъ концевъ этой прямой; а всякая точка, лежащая внѣ этого перпендикуляра, ближе къ тому концу, который съ ней находится по одну сторону перпендикуляра.*

1) Пусть точка O (фиг. 24) есть середина прямой DF, и прямая OC перпендикулярна къ DF. Возьмемъ какую нибудь точку C на этомъ перпендикулярѣ и соединимъ ее съ концами F и D прямой DF, получимъ равныя наклонныя, ибо онѣ равно-удалены отъ основанія O перпендикуляра OC (§ 50, 1-е).

2) Возьмемъ точку F, внѣ перпендикуляра CD, проведеннаго черезъ середину C прямой AB, и докажемъ, что $BF < AF$; точки F и B лежатъ по одну сторону перпендикуляра CD.

Фиг. 26-я.



Соединивъ точку D, пересѣченіе AF и перпендикуляра CD, съ концомъ B прямой AB, получимъ $DB = DA$ (§ 50, 1-е). Прямая BF короче ломанной BDF, т. е.

$$BF < BD + DF;$$

или, вставивъ, вмѣсто BD, равную ей AD, получимъ

$$BF < AD + DF,$$

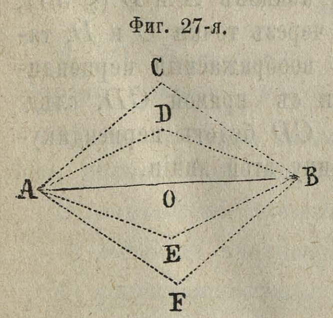
или $BF < AF$.

Предложеніе.

§ 55. *Перпендикуляръ, проведенный изъ середины прямой, проходитъ черезъ всѣ точки, равно-удаленныя отъ концовъ этой прямой.*

Пусть дана прямая AB и положимъ, что $DA = DB$, $CA = CB$, $EA = EB$ и т. д.; надо доказать, что точки C, D, E и т. д. всѣ лежатъ на одной прямой, — именно на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины O къ прямой AB. Вообразимъ, что изъ точки O возставленъ перпендикуляръ къ прямой AB: онъ долженъ пройти черезъ точку C; и дѣйствительно, если бъ точка C осталась внѣ этого перпендикуляра, то она неравно бы отстояла отъ точекъ A и B (§ 54), что противно условію; и такъ точка C лежитъ на упомянутомъ перпендикулярѣ; то же скажемъ и объ остальныхъ точкахъ D, E, F и т. д.

Фиг. 27-я.



§ 56. Изъ предъидущаго предложенія мы видѣли, что *всѣ точки*, равно-отстоящія отъ концовъ прямой, лежатъ на одной прямой линіи, именно на перпендикулярѣ, проходящемъ черезъ середину этой прямой; притомъ свойство это принадлежитъ только этимъ точкамъ; ибо всякая точка, неравно-отстоящая отъ концовъ прямой, будетъ внѣ упомянутаго перпендикуляра (§ 54). Поэтому говорятъ, что *геометрическое мѣсто точекъ, равно-отстоящихъ отъ концовъ прямой, есть перпендикуляръ къ этой прямой, проходящій черезъ ея середину.*

Вообще линія, прямая или кривая, точки которой удовлетворяютъ какому нибудь условію, а другія точки плоскости не удовлетворяютъ этому условію называется *геометрическимъ мѣстомъ* этихъ точекъ.

Предложеніе.

§ 57. *Прямая, соединяющая двѣ точки, изъ коихъ каждая равно отстоитъ отъ концовъ прямой, перпендикулярна къ этой прямой и проходитъ черезъ ея середину.*

Пусть точки C и D равно отстоятъ отъ концовъ A и B прямой линіи AB, т. е. полагаемъ, что $AC = BC$, $AD = BD$. Надо доказать, что прямая линія CD, проведенная черезъ точки C и D, будетъ перпендикулярна къ AB и пройдетъ черезъ середину послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, если вообразимъ перпендикуляръ къ AB, проходящій черезъ середину этой линіи, то онъ пройдетъ черезъ всѣ точки, равно-удаленныя отъ концовъ A и B (§ 55), а слѣд. пройдетъ и черезъ точки C и D; такимъ образомъ этотъ воображаемый перпендикуляръ будетъ имѣть двѣ общія точки съ прямой CD, слѣд. онъ сольется съ CD (§ 10); значитъ CD будетъ перпендикулярна къ AB и пройдетъ черезъ середину этой линіи.

Фиг. 28-я.

4. Названіе угловъ, составляемыхъ двумя прямыми съ сѣкущею; зависимость между этими углами; случай, когда эти двѣ прямыя пересѣкаются, и когда сумма внутреннихъ угловъ по одну сторону сѣкущей равна двумъ прямымъ.

§ 58. Отъ пересѣченія двухъ прямыхъ третьею прямою, *сѣкущею*, образуется восемь угловъ, которымъ даютъ особыя названія.

Пусть AB и CD суть двѣ прямыя, разсѣченныя прямою EF. Четыре угла DHG, GHC, BGH, AGH, которыхъ отверстія находятся между линіями AB и CD, называются *внутренними*; а остальные четыре угла: DHF, FHC, BGE и EGA, которыхъ отверстія находятся внѣ прямыхъ AB и CD, называются *внѣшними*. Прямая EF называется *сѣкущею*.

Фиг. 29-я.

Два внутренніе угла, лежащіе по ту и другую сторону сѣкущей и несмежные, называются *внутренними противоположными*: или *внутренними перекрестными*; напр. DHG и HGA, а также GHC и BGH.

Два внѣшніе угла, лежащіе по ту и другую сторону сѣкущей и несмежные, называются *внѣшними противоположными* или *внѣшними перекрестными* DHF и EGA, а также FHC и BGE.

Два несмежные угла, одинъ внутренній, другой внѣшній, по одну сторону сѣкущей, называются *соотвѣтственными* или *соотвѣтствующими*; такъ DHF и BGH, DHG и BGE, FHC и AGH, CHE и AGE суть соотвѣтственные углы.

Предложеніе.

§ 59. *Если сумма двухъ внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ, то*

1) *сумма двухъ внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ;*

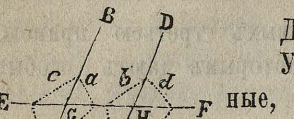
2) *внутренніе противоположные углы равны между собою;*

3) *внѣшніе противоположные углы равны между собою;*

4) *соотвѣтственные углы равны между собою.*

Положимъ, что отъ пересѣченія прямыхъ линій AB и CD сѣкущею EF получились внутренніе углы a и b, которыхъ сумма

Фиг. 30-я.



равна $2D$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ; поэтому имѣемъ условіе

$$a+b=2D.$$

Докажемъ: 1) $c+d=2D$; $e+h=2D$.

Углы a и c смежные, b и d тоже смежные, слѣд. (§ 36)

$$a+c+b+d=4D,$$

по условію $a+b=2D$;

вычтя второе равенство изъ перваго, по частямъ, получимъ $c+d=2D$.

По условію $a+b=2D$,

но $a=e$, $b=h$ (§ 41); подставивъ въ предъидущее равенство, вмѣсто a и b, имъ равныя e и h,

получимъ $e+h=2D$.

Замѣтимъ, что сумма внутреннихъ угловъ f и g по другую сторону сѣкущей EF тоже равна $2D$. Дѣйствительно, мы уже доказали, что

$$c+d=2D,$$

но $c=f$, $d=g$; слѣд. $f+g=2D$.

2) Докажемъ, что $a=g$.

По условію a служитъ дополненіемъ до $2D$ углу b, но и уголъ g служитъ дополненіемъ до $2D$ тому же углу b (§ 36); слѣд. $a=g$ (§ 34). Также докажемъ, что $b=f$.

3) Докажемъ равенство внѣшнихъ противоположныхъ угловъ, напримѣръ $d=e$.

Намъ извѣстно, что внутренніе противоположные углы равны между собою, $g=a$, но $g=d$, $a=e$ (§ 41); слѣд. $d=e$. Также докажемъ, что $h=c$.

4) Соотвѣтственные углы равны, напримѣръ $a=d$.

По условію $a+b=2D$, а какъ углы b и d смежные, то $b+d=2D$; слѣд. $a=d$ (§ 34). Также докажемъ, что $b=c$, $f=h$ и $e=g$.

§ 60. Слѣдствіе. *Всякое равенство, выраженное въ предложеніи предъидущаго параграфа, влечетъ за собою остальныя равенства.* Въ самомъ дѣлѣ:

1) Пусть сумма внѣшнихъ угловъ, напримѣръ c и d, по одну сторону сѣкущей, равна 2-мъ прямымъ, т. е. $c+d=2D$. Углы a и c, а также b и d смежные, слѣдовательно

$$a + c + b + d = 4D,$$

по условію $\qquad c + d = 2D;$

слѣдовательно $\qquad a + b = 2D,$

т. е. сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ. Доказавъ это равенство, заключаемъ объ остальныхъ равенствахъ на основаніи предъидущаго параграфа.

2) Пусть внутренніе противоположные углы равны между собою, напримѣръ, $a = g$. Смежные углы b и g доставляютъ равенство

$$b + g = 2D.$$

Вставивъ сюда, вмѣсто g, равное ему a, получимъ

$$b + a = 2D.$$

Поэтому сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна $2D$; а это равенство влечетъ за собою и остальныя равенства, изложенныя въ предъидущемъ параграфѣ.

3) Пусть внѣшніе противоположные углы равны между собою, напр. $d = e$. Извѣстно, что $d = g$, $e = a$ (§ 41), слѣд. $g = a$; а мы сейчасъ доказали (2-е), что это равенство влечетъ и остальныя.

4) Пусть соотвѣтственные углы равны между собою, напримѣръ $a = d$.

Углы b и d смежные, слѣдовательно

$$b + d = 2D;$$

вставимъ сюда, вмѣсто d, равное ему a, получимъ

$$b + a = 2D;$$

а это равенство влечетъ за собою и остальныя равенства (§ 59).

Предложеніе.

§ 61. *Если двѣ пересѣкающіяся прямыя разсѣчены сѣкущею, то сумма внутреннихъ угловъ, на бокахъ которыхъ лежитъ точка встрѣчи, меньше двухъ прямыхъ угловъ.*

Возьмемъ двѣ прямыя AB и BC, пересѣкающіяся въ точкѣ B; разсѣчемъ ихъ прямою DG. Докажемъ, что сумма внутреннихъ угловъ BEF и BFE меньше двухъ прямыхъ угловъ; на

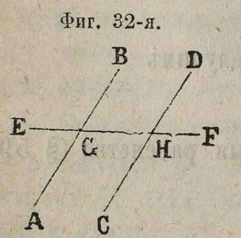
бокахъ этихъ угловъ находится точка встрѣчи B. Пусть O означаетъ середину прямой EF; соединимъ точку O съ B, и, продолживъ прямую BO, отложимъ OH, равную OB, а точку H соединимъ съ точкою E прямою EH. Углы BOF и EOH равны между собою, какъ противоположные; на бокахъ ихъ, отъ общей вершины O, отложены равныя части $OF = OE$, $OB = OH$, и точки отложенія соединены въ каждомъ углу, поэтому соединяющія прямыя съ равными боками образуютъ соотвѣтственно равные углы (§ 24); значитъ $\angle BFO = \angle HEO$. Очевидно, что уголъ HEB меньше двухъ прямыхъ угловъ, значитъ и сумма $\angle HEF + \angle BEF$ меньше двухъ прямыхъ; а какъ $\angle HEF = \angle BFE$, то и сумма $\angle BFE + \angle BEF$ меньше двухъ прямыхъ угловъ.

Фиг. 31-я.

Предложеніе.

§ 62. *Если двѣ прямыя линіи составляютъ съ сѣкущею такіе внутренніе углы, по одну изъ ея сторонъ, что сумма ихъ равна двумъ прямымъ, то эти двѣ прямыя не пересѣкутся, сколько бы ихъ ни продолжали.*

Пусть сѣкущая EF, пересѣкая прямыя AB и CD, образуетъ внутренніе углы BGH и DHG, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ. Надобно доказать, что прямыя линіи AB и CD не пересѣкаются на всемъ ихъ протяженіи. Дѣйствительно, если бъ мы допустили что эти линіи пересѣкаются по ту сторону прямой EF, то на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 61, заключили бы, что сумма внутреннихъ угловъ, $\angle BGH + \angle DHG$, на бокахъ которыхъ лежитъ точка встрѣчи, была бы меньше 2-хъ прямыхъ угловъ; а это противорѣчитъ условію, по которому эта сумма равна двумъ прямымъ; слѣд. прямыя линіи AB и CD не могутъ пересѣчься по ту сторону сѣкущей EF. Онѣ не могутъ встрѣтиться и по сю сторону сѣкущей EF; въ самомъ дѣлѣ, допустивъ встрѣчу этихъ линій, найдемъ на основаніи того же предложенія, изложеннаго въ § 61, что сумма угловъ $\angle AGH + CHG$ будетъ меньше двухъ прямыхъ угловъ,



Фиг. 32-я.

а отсюда слѣдуетъ, что сумма угловъ $\angle BGH + \angle DHG$ будетъ больше двухъ прямыхъ (потому что сумма всѣхъ упомянутыхъ четырехъ угловъ равна 4-мъ прямымъ), а это противно условію, по которому сумма угловъ $\angle BGH + \angle DHG = 2$ прямымъ угламъ.

§ 63. Слѣдствіе. *Двѣ прямыя не могутъ пересѣчься:*

1) *если сумма внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ*; или

2) *если внутренніе противоположные углы равны между собою*; или

3) *если внѣшніе противоположные углы равны между собою*, или

4) *если соотвѣтственные углы равны между собою.*

И дѣйствительно, каждый изъ этихъ случаевъ ведетъ за собою равенство суммы внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, двумъ прямымъ угламъ (§ 60), а при такомъ условіи линіи не пересѣкаются (§ 62).

Параллельныя линіи.

5. Признаки параллельныхъ линій. — Постулатъ. — Проведеніе линіи черезъ данную точку и параллельную данной прямой; — Признакъ взаимнаго пересѣченія двухъ прямыхъ линій. — Свойство угловъ, происшедшихъ отъ пересѣченія параллельныхъ линій сѣкущею.— Перпендикуляръ къ одной изъ двухъ параллельныхъ линій. — Двѣ прямыя, параллельныя третьей прямой. Разстояніе между двумя параллельными. — Свойство угловъ, которыхъ бока взаимно параллельны или перпендикулярны.

§ 64. Припомнимъ, что мы разсматриваемъ прямыя линіи на одной плоскости, притомъ линіи предполагаются продолженными сколько угодно. Если провесть на плоскости прямую линію, а потомъ другую прямую, то эта послѣдняя можетъ пересѣчь или не пересѣчь первую линію; другихъ положеній не можетъ быть. Въ первомъ случаѣ линіи называются *пересѣкающимися* и образуютъ четыре угла около точки встрѣчи. Если жъ линіи не встрѣчаются, то называются *параллельными*; онѣ угла собою не составляютъ. И такъ *параллельными линіями называются такія прямыя линіи, которыя, находясь на одной плоскости, никогда не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжали.* На основаніи этого опредѣленія и §§ 62 и 63 выводимъ:

Предложеніе.

§ 65. *Двѣ прямыя параллельны между собою если:*

1) *сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;* или

2) *сумма внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;* или

3) *внутренніе противоположные углы равны;* или

4) *внѣшніе противоположные углы равны;* или

5) *соотвѣтственные углы равны.*

И дѣйствительно во всѣхъ этихъ случаяхъ линіи не пересѣкаются (§§ 62, 63); слѣдовательно онѣ параллельны между собою (§ 64).

§ 66. Слѣдствіе. *Двѣ прямыя линіи, перпендикулярныя порознь, къ третьей, параллельны между собою.*

Вообразимъ, что $AB \perp FG$ и $CD \perp FG$; надобно доказать, что AB параллельна CD, что для краткости пишутъ $AB \parallel CD$. Вслѣдствіе перпендикулярности линій AB и CD къ прямой FG, углы BFG и DGF прямые, слѣд. сумма ихъ равна 2-мъ прямымъ угламъ; а какъ эти два внутренніе угла лежатъ по одну сторону сѣкущей FG, то прямыя AB и CD параллельны между собою (§ 65).

Фиг. 33-я.

§ 67. Если на прямой AB возьмемъ какія нибудь двѣ точки C и D и проведемъ двѣ прямыя линіи: одну CF перпендикулярно къ линіи AB, а другую DG наклонную къ той же линіи, то перпендикуляръ пересѣчется съ наклонною, при достаточномъ продолженіи ихъ. Не смотря на очевидность этой истины, геометры не могли доказать ее, а потому, не останавливаясь на опытахъ доказательствъ этой истины, мы допустимъ ее въ видѣ *постулата* или *требованія.* И такъ

Фиг. 34-я.

постулатъ:

наклонная и перпендикуляръ къ одной и той же прямой, по достаточномъ ихъ продолженіи, всегда пересѣкутся.

Предложеніе.

§ 68. *Черезъ всякую точку, взятую внѣ прямой, можно всегда провести къ ней параллельную линію, притомъ только одну.*

1) Возьмемъ какую нибудь прямую *AB* и внѣ ея точку *C*; надобно объяснить, что черезъ эту точку можно провести прямую, параллельную къ *AB*. Изъ точки *C* опустимъ перпендикуляръ *CD* на прямую *AB*, а къ линіи *CD*, изъ точки *C*, возставимъ перпендикуляръ *HE*; перпендикуляры *HE* и *AB* къ одной и той же прямой *CD* параллельны между собою (§ 66), т. е. *HE* параллельна *AB*.

Фиг. 35-я.

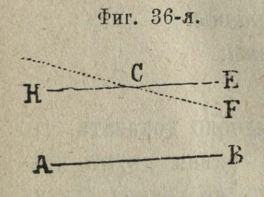
2) Надобно объяснить, что, кромѣ прямой *HE*, нельзя провесть другой линіи, черезъ точку *C*, параллельно *AB*. Черезъ точку *C* проведемъ какую нибудь прямую *CF*, различную отъ *CE*; она будетъ *наклонною* къ *CD*, потому что черезъ всякую точку возможенъ только одинъ перпендикуляръ. Примѣняя къ перпендикуляру *BD* и наклонной *CF* извѣстный постулатъ (§ 67), найдемъ, что *CF* пересѣчетъ *AB*. Сказанное здѣсь о прямой *CF* примѣняется ко всякой прямой, проведенной черезъ *C*, за исключеніемъ *CE*: всѣ онѣ пересѣкутъ прямую *AB*, по ту или другую сторону перпендикуляра *CD*. Этимъ и доказывается, что можно провести черезъ точку только одну параллельную къ прямой.

Предложеніе.

§ 69. *Прямая линія, пересѣкающая одну изъ взаимно параллельныхъ линій, пересѣкаетъ и другую линію.*

Положимъ, что *AB* ∥ *HE*, и что *CF* пересѣкаетъ линію *HE*; надо доказать, что *CF* пересѣкаетъ и линію *AB*. Положимъ противное, т. е. что *CF* не пересѣкаетъ *AB*; по этому *CF* параллельна прямой *AB*; и такъ черезъ точку *C* проведены двѣ параллельныя къ прямой *AB*, именно *HE* и *CF*, а это невозможно (§ 68); слѣд. предположеніе наше, будто бы *CF*, пересѣкая *HE*, не пересѣчетъ *AB*, невозможно.

Фиг. 36-я.

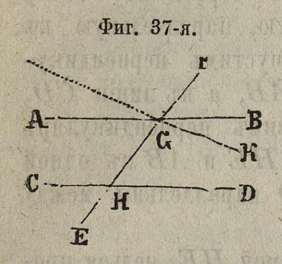


Предложеніе.

§ 70. *Когда двѣ прямыя пересѣчены третьею и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, не равна двумъ прямымъ, то эти линіи пересѣкутся.*

Пусть GK и CD будутъ данныя прямыя, а EF ихъ сѣкущая; положимъ, что сумма угловъ DHG и KGH менѣе двухъ прямыхъ; докажемъ, что GK и CD пересѣкутся. Построивъ уголъ HGB, дополнительный до двухъ прямыхъ углу DHG, получимъ прямую GB, параллельную CD (§ 65), и различную отъ GK; а какъ черезъ точку G можно провесть только одну параллельную къ CD (§ 68), то GK должна пересѣчь CD.

Фиг. 37-я.



Примѣчаніе. Знаменитый греческій геометръ Эвклидъ, жившій въ III вѣкѣ до Р. Х., принялъ это предложеніе за аксіому (извѣстная 11-я аксіома, см. переводъ Ѳ. Петрушевскаго Эвклидовыхъ началъ восемь книгъ).

Въ настоящемъ руководствѣ, какъ и въ большей части сочиненій по геометріи, допускается безъ доказательства, что перпендикуляръ встрѣчается съ наклонною; очевидно, что это послѣднее допущеніе есть частный случай 11-й аксіомы, принятой Эвклидомъ.

Предложеніе (обратное § 65).

§ 71. *Если двѣ линіи параллельны, то*

1) *сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;*

2) *сумма внѣшнихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, равна двумъ прямымъ угламъ;*

3) *внутренніе противоположные углы равны;*

4) *внѣшніе противоположные углы равны;*

5) *соотвѣтственные углы равны.*

Пусть $AB \parallel CD$, EF — ихъ сѣкущая; надобно доказать, что сумма внутреннихъ угловъ, $\angle BGH + \angle DHG$, равна двумъ прямымъ. Допустимъ противное, что сумма ихъ не равна двумъ прямымъ угламъ. Согласно этому предположенію, на основаніи

Фиг. 32-я.

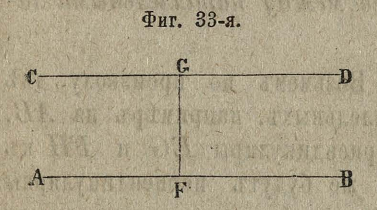
предъидущаго предложенія, приходимъ къ заключенію, что прямыя AB и CD должны пересѣчься; а это противно условію, по которому прямыя AB и CD даны параллельными между собою. Отсюда слѣдуетъ, что нельзя допустить, будто бы сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, не равна двумъ прямымъ.

Доказавъ этотъ случай, объ остальныхъ заключимъ на основаніи предложенія, которое изложено въ § 59, и по которому равенство двумъ прямымъ суммы двухъ внутреннихъ угловъ, по одну сторону сѣкущей, влечетъ за собою равенство внутреннихъ противоположныхъ угловъ, внѣшнихъ противоположныхъ, равенство соотвѣтственныхъ угловъ и равенство двумъ прямымъ суммы двухъ внѣшнихъ угловъ по одну сторону сѣкущей.

Предложеніе.

§ 72. *Прямая линія, перпендикулярная къ одной изъ двухъ параллельныхъ, перпендикулярна и къ другой.*

Фиг. 33-я.

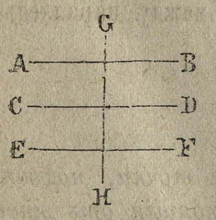


Пусть $AB \parallel CD$ и $FG \perp AB$; надобно доказать, что $FG \perp CD$. По условію уголъ BFG — прямой; поэтому, на основаніи (§ 71, 1-е), и уголъ DGF — прямой; и такъ прямая $DG \perp FG$.

Предложеніе.

§ 73. *Двѣ прямыя, параллельныя, порознь, какой нибудь третьей линіи, параллельны между собою.*

Фиг. 38-я.



Пусть $AB \parallel EF$ и $CD \parallel EF$; надобно доказать, что $AB \parallel CD$. Проведемъ GH перпендикулярно къ EF, она будетъ перпендикулярна къ CD и AB (§ 72). Поэтому прямыя AB и CD, будучи перпендикулярны къ GH, параллельны между собою (§ 66).

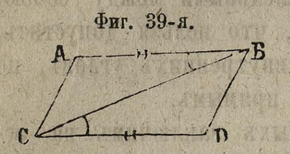
Предложеніе.

§ 74. *Части параллельныхъ, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собою.*

Пусть $AB \parallel CD$, а $AC \parallel BD$; надобно доказать, что $AB = CD$ и $AC = BD$.

Проведемъ сѣкущую BC, она при параллельныхъ линіяхъ AB и CD составитъ внутренніе противоположные равные углы, $\angle ABC = \angle BCD$ (§ 71 3-е); такіе же внутренніе углы получатся при другихъ параллельныхъ AC и BD, именно $\angle CBD = \angle ACB$. При такихъ условіяхъ, перемѣстимъ часть плоскости BCD такъ, чтобы точка B совпала съ C, а точка C съ B: тогда прямая CD пойдетъ по BA, потому что $\angle BCD = \angle ABC$, а прямая BD пойдетъ по CA, ибо $\angle CBD = \angle ACB$; слѣдовательно точка D одновременно должна находиться на двухъ прямыхъ BA и CA; значитъ она должна совпасть съ точкою A. Поэтому концы C и D прямой CD совпали съ концами B и A прямой AB, значитъ — прямая CD равна AB. Концы B и D прямой BD совпали съ концами C и A прямой CA, а потому $BD = AC$.

Фиг. 39-я.



§ 75. Слѣдствіе. *Разстояніе между параллельными линіями вездѣ одинаково.*

Пусть AB параллельна CD. Возьмемъ по произволу двѣ точки E и F на одной изъ параллельныхъ, напримѣръ на AB, и проведемъ перпендикуляры EG и FH къ линіи AB; они же будутъ перпендикулярны и къ CD (§ 72), и слѣд. параллельны между собою (§ 66). Части параллельныхъ EG и FH, заключающіяся между параллельными AB и CD, равны между собою (§ 74); слѣд. $EG = FH$; а эти линіи выражаютъ разстояніе между параллельными линіями AB и CD.

Фиг. 40-я.

Предложеніе.

§ 76. *Прямая, проведенная черезъ двѣ точки, находящіяся по одну сторону прямой и равно-отстоящія отъ этой послѣдней, параллельна къ ней.*

Пусть точки C и D равно-отстоятъ отъ прямой AB, т. е. полагаемъ, что перпендикуляры CF и DG, опущенные изъ точекъ C и D на прямую AB, равны между собою, $CF = DG$.

Докажемъ, что $CD \parallel AB$. Черезъ точку C вообразимъ параллельную къ AB; положимъ, что она пересѣчетъ линію DG въ точкѣ H; вслѣдствіе параллельности этихъ линій имѣемъ $HG=CF$ (§ 75); а по условію $DG=CF$; слѣд. $HG=DG$; поэтому точка пересѣченія H прямой, проведенной черезъ точку C параллельно AB, совпадетъ съ точкою D; и такъ упомянутая параллельная линія къ AB съ прямою CD имѣетъ двѣ общія точки C и D, слѣд. она совпадетъ съ CD; значитъ CD параллельна къ AB.

Фиг. 41-я.

§ 77. Слѣдствіе. *Всѣ точки, находящіяся по одну сторону прямой и равно-отстоящія отъ нея, находятся на одной прямой, параллельной къ упомянутой прямой.*

Пусть точки C, D, F, ... находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ прямой AB. Проведя изъ этихъ точекъ перпендикуляры къ прямой AB, по условію, получимъ $Cc=Dd=Ee=Ff=$... Прямая, проходящая черезъ двѣ точки C и D, равно-отстоящія отъ прямой AB, параллельна этой послѣдней (§ 76); по той же причинѣ, прямая, проходящая черезъ двѣ точки C и E, параллельна AB; двѣ прямыя CD и CE должны совпасть; въ противномъ случаѣ имѣли бы двѣ параллельныя къ AB, проходящія черезъ одну и ту же точку C; слѣд. точка E находится на продолженной прямой CD. Все сказанное о точкѣ E дословно примѣняется и къ точкѣ F, и къ другимъ. И такъ, точки C, D, E, F, ... всѣ лежатъ на прямой параллельной AB.

Фиг. 42-я.

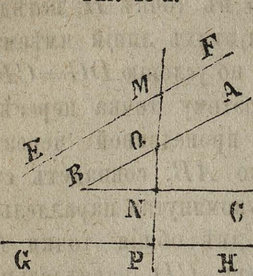
По этому говорятъ, что *геометрическое мѣсто точекъ, равно-удаленныхъ отъ данной прямой и лежащихъ по одну ея сторону, есть прямая, параллельная этой данной прямой.*

Предложеніе.

§ 78. *Двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя двумъ встрѣчающимся прямымъ, пересѣкаются между собою и составляютъ уголъ равный или дополнительный углу между линіями, которымъ онѣ параллельны.*

1) Возьмемъ двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и BC; положимъ, что $EF \parallel AB$, $GH \parallel BC$; докажемъ, что EF и GH пересѣкутся. На прямыхъ BC и BA возьмемъ произвольныя точки N и Q; прямая, проведенная черезъ эти точки, пересѣчетъ прямыя EF и GH (§ 69); пусть M и P означаютъ эти точки пересѣченія.

Фиг. 43-я.



При двухъ пересѣкающихся прямыхъ BA и BC, и сѣкущей MP, имѣемъ (§ 61):

$$\angle BQN + \angle BNQ < 2d;$$

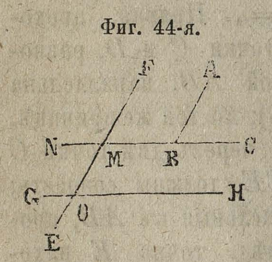
но $\angle BQN = \angle EMP$, $\angle BNQ = \angle GPM$;

слѣд. $$\angle EMP + \angle GPM < 2d;$$

отсюда на основаніи § 70 заключаемъ, что EF и GH пересѣкутся.

2) Пусть $BA \parallel OF$, и $BC \parallel OH$. Надобно доказать, что, напримѣръ, уголъ $ABC = FOH$ и $ABC + FOG = 2d$. Продолжимъ BC и пусть M означаетъ пересѣченіе ея съ прямою OF. При параллельныхъ линіяхъ AB и MF, и сѣкущей NC имѣемъ равные соотвѣтственные углы $ABC = FMC$; при другихъ параллельныхъ NC и GH, и сѣкущей FE соотвѣтственные углы также равны, слѣдовательно $\angle FMC = \angle FOH$; значитъ $\angle ABC = \angle FOH$.

Фиг. 44-я.



Разсматривая тѣ же параллельныя и тѣ же сѣкущія, получимъ

$$\angle ABC + \angle FMN = 2d \text{ (§ 71, 2-е)}$$

и $$\angle FMN = \angle FOG \text{ (§ 71, 5-е)};$$

а отсюда $$\angle ABC + \angle FOG = 2d.$$

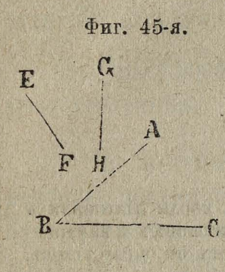
Примѣчаніе. Легко замѣтить, что тѣ углы равны, которыхъ бока направлены въ одну сторону, напримѣръ $\angle ABC$ и $\angle FOH$, или въ стороны противныя, напримѣръ $\angle ABC$ и $\angle GOE$; а тѣ углы будутъ дополнительные, которыхъ одна пара параллельныхъ боковъ направлена въ одну сторону, а другая пара — въ противоположныя стороны; причемъ направленія линій принимаются отъ вершинъ угловъ.

Предложенiе.

§ 79. *Двѣ прямыя, соотвѣтственно перпендикулярныя двумъ встрѣчающимся прямымъ, пересѣкаются между собою и составляютъ уголъ равный или дополнительный до двухъ прямыхъ углу между линiями, которымъ онѣ перпендикулярны.*

1) Возьмемъ двѣ пересѣкающiяся прямыя AB и BC, и положимъ, что $EF \perp AB$, а $GH \perp BC$; надобно доказать, что прямыя GH и EF пересѣкутся. По условiю, $BC \perp GH$, по этому линiю BC можно разсматривать какъ перпендикуляръ, проведенный изъ точки B къ прямой GH; слѣд. BA будетъ наклонною къ GH, и обратно GH есть наклонная къ BA; а по условiю, $EF \perp BA$; слѣд. перпендикуляръ EF и наклонная GH къ одной и той же прямой BA непремѣнно встрѣтятся (§ 67).

Фиг. 45-я.



2) Пусть $DF \perp BC$, а $EF \perp AB$; надобно доказать, что, напримѣръ, уголъ $DFE = ABC$, а $\angle EFM + \angle ABC = 2d$.

Фиг. 46-я.

Черезъ вершину В проведемъ BG и BH соотвѣтственно перпендикулярно къ BC и BA: эти перпендикуляры соотвѣтственно параллельны прямымъ FD и EF, именно $BG \parallel FD$, а $BH \parallel FE$ (§ 66). Поэтому, на основанiи предъидущаго предложенiя,

$$\angle DFE = \angle GBH \text{ и } \angle EFM + \angle GBH = 2d.$$

Но углы GBH и ABC равны между собою, потому что одинъ и тотъ же уголъ ABG служитъ дополненiемъ до прямаго каждому изъ нихъ; вставивъ въ предъидущiя равенства, вмѣсто угла GBH, уголъ ABC, ему равный, получимъ

$$\angle DFE = \angle ABC,$$
$$\angle EFM + \angle ABC = 2d.$$

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

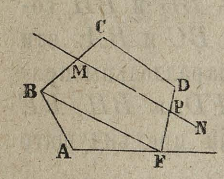
Многоугольники.

---

6. Многоугольникъ, его периметръ, стороны, углы, вершины, хорды, діагонали и внѣшніе углы.—Многоугольники выпуклые.—Сумма угловъ внѣшнихъ и внутреннихъ выпуклаго многоугольника.—Раздѣленіе многоугольниковъ по числу угловъ.

§ 80. *Многоугольникомъ* или *полигономъ* называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ прямыми линіями, составляющими ломанную линію. Эта ломанная называется *периметромъ* многоугольника. Всякая прямая, входящая въ составъ периметра, называется *стороною* или *бокомъ* многоугольника, напримѣръ *AB*, *BC*, и т. д. въ многоугольникѣ *ABCDF*.

Фиг. 47-я.



Всякій уголъ, составленный двумя послѣдовательными сторонами многоугольника, называется *угломъ многоугольника*, напримѣръ уголъ *ABC*; а вершины этихъ угловъ—*вершинами многоугольника*, напримѣръ *A*, *B*,....

Хордою многоугольника называется прямая, соединяющая какія нибудь двѣ точки периметра, напримѣръ *MP*.

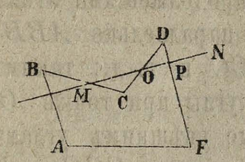
Діагональю называется прямая, соединяющая двѣ несмежныя вершины многоугольника, напримѣръ *BF*.

Внѣшнимъ угломъ многоугольника называется уголъ, составленный одною изъ двухъ смежныхъ сторонъ и продолженіемъ другой.

Въ противоположность внѣшнимъ угламъ, *внутренними* углами называются углы многоугольника.

§ 81. *Выпуклымъ* многоугольникомъ называется такой многоугольникъ, котораго периметръ пересѣкается прямою не болѣе, какъ въ двухъ точкахъ, напр. $ABCDF$ (фиг. 47). Въ противномъ случаѣ многоугольникъ имѣетъ *входящіе углы*, напримѣръ $ABCDF$ (фиг. 48), въ которомъ уголъ C входящій, онъ равенъ четыремъ прямымъ угламъ безъ угла BCD.

Фиг. 48-я.



Въ настоящемъ курсѣ разсматриваются только выпуклые многоугольники.

* *Число діагоналей многоугольника.* Пусть n означаетъ число вершинъ многоугольника. Проведя всѣ діагонали изъ какой нибудь вершины, получимъ $n - 3$ діагонали; а какъ всѣхъ вершинъ n, то такимъ образомъ получится $(n - 3)n$ діагоналей; очевидно, что въ это число каждая діагональ войдетъ два раза; слѣд. число всѣхъ діагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

* *Число треугольниковъ, на которые разбивается многоугольникъ діагоналями, проведенными изъ одной вершины, равно числу сторонъ многоугольника безъ 2-хъ.* Проведя діагонали изъ какой нибудь вершины A во всѣ остальныя, получимъ столько треугольниковъ, сколько находится сторонъ многоугольника, лежащихъ противъ вершины A, т. е. $n - 2$, потому что изъ всего n числа сторонъ многоугольника только двѣ стороны прилежатъ къ вершинѣ A, а остальныя лежатъ противъ нея.

Предложеніе.

§ 82. *Сумма внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія въ одну сторону всѣхъ боковъ многоугольника, равна четыремъ прямымъ угламъ* (фиг. 49).

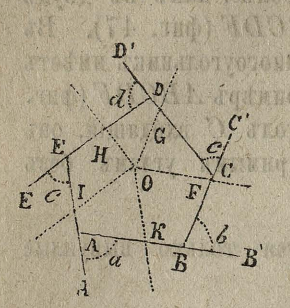
Возьмемъ какой нибудь многоугольникъ (выпуклый) $ABCDE$, продолжимъ его бока AB, BC,... въ одномъ направленіи, назовемъ буквами a, b, c, d и e образовавшіеся углы, и докажемъ, что

$$a + b + c + d + e = 4D,$$

буквою D означенъ прямой уголъ.

Черезъ какую нибудь точку O проведемъ прямыя параллельно всѣмъ бокамъ многоугольника, и въ одну сторону съ продолженiями этихъ боковъ, именно OF параллельно ABB', OG параллельно BCC' и т. д.; такимъ образомъ получатся углы при точкѣ O, соотвѣтственно равные внѣшнимъ угламъ многоугольника, именно $\angle FOG = b$, $\angle GOH = c$ и т. д., наконецъ $\angle FOK = a$; потому что стороны этихъ угловъ параллельны и одинаково направлены (§ 78). Но сумма всѣхъ этихъ угловъ, около точки O, равна четыремъ прямымъ (§ 39); слѣдовательно и сумма внѣшнихъ угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ.

Фиг. 49-я.



Предложенiе.

§ 83. *Сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ многоугольника равна двумъ прямымъ угламъ, умноженнымъ на число сторонъ многоугольника безъ двухъ.*

Возьмемъ многоугольникъ произвольнаго числа сторонъ; для общности назовемъ буквою n число его сторонъ или вершинъ. Продолживъ всѣ бока въ одну сторону, получимъ при каждой вершинѣ смежные углы, которыхъ сумма, какъ извѣстно, равна двумъ прямымъ; а сумма смежныхъ угловъ при всѣхъ вершинахъ равна 2-мъ прямымъ, умноженнымъ на число вершинъ n, что составитъ $2Dn$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ. Въ эту сумму войдутъ всѣ внутреннiе углы и всѣ внѣшнiе, сумма этихъ послѣднихъ равна $4D$; слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ равна

$$2Dn - 4D \text{ или } 2D(n-2).$$

Напримѣръ, сумма внутреннихъ угловъ въ многоугольникѣ о 5-ти сторонахъ равна $2D(5-2) = 6D$.

§ 84. Многоугольники получаютъ различныя названiя по числу ихъ сторонъ или, что то же, по числу ихъ угловъ.

Треугольникомъ называется многоугольникъ о 3 сторонахъ.
Четыреугольникомъ или четверосторонникомъ „ 4 „
Пятиугольникомъ или пятисторонникомъ „ 5 „
Шестиугольникомъ или шестисторонникомъ „ 6 „ и т. д.

§ 85. Многоугольники называются *равными*, если, по наложенiи одного на другой, можно совмѣстить всѣ вершины одного съ вершинами другого; при этомъ всѣ бока одного совмѣстятся съ боками другаго (§ 9) и всѣ углы одного многоугольника совмѣстятся съ углами другаго (§ 22).

Примѣчанiе. Очевидно, что двѣ пересѣкающiяся прямыя линiи, образуя уголъ, не ограничиваютъ плоскости; самое меньшее число линiй, ограничивающихъ плоскость—это три. Если бока какого нибудь угла пересѣчемъ прямою, то получимъ между ними опредѣленную плоскость, ограниченную тремя прямыми—это *треугольникъ*. Въ случаѣ параллельности двухъ прямыхъ, недостаточно третьей прямой для ограниченiя плоскости между этими параллельными, а необходимы еще по крайней мѣрѣ двѣ линiи. Приступая къ изслѣдованiю свойствъ многоугольниковъ, начнемъ съ треугольниковъ.

---

7. Треугольникъ: его основанiе и высота.—Сумма угловъ треугольника внутреннихъ и внѣшнихъ.—Раздѣленiе треугольника по угламъ.—Ипотенуза и катеты.—Равнымъ угламъ противолежатъ равные бока и наоборотъ. — Раздѣленiе треугольниковъ по сторонамъ; свойства треугольниковъ равнобедренныхъ и правильныхъ.—Большему углу въ треугольникѣ противолежитъ большiй бокъ, и наоборотъ.

§ 86. Мы уже видѣли, что треугольникъ есть многоугольникъ о трехъ сторонахъ; слѣдовательно *треугольникомъ* называется часть плоскости, ограниченная со всѣхъ сторонъ тремя пересѣкающимися прямыми.

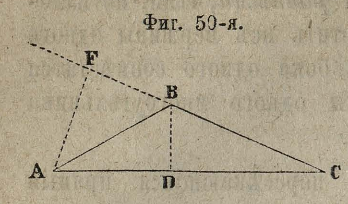
Во всякомъ треугольникѣ—три стороны и три угла; какъ тѣ, такъ и другiя условились называть *частями*[1]) треугольника; слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ *шесть частей*.

Каждую сторону треугольника, по произволу, можно принять за *основанiе*, а разстоянiе противоположной ей вершины до осно-

---

[1]) Часть треугольника въ сущности не можетъ быть ни линiей, ни угломъ, потому что часть цѣлаго всегда однородна съ своимъ цѣлымъ; поэтому неправильно называть бока и углы треугольника его частями, но выраженiе это всѣми принято. Вмѣсто части треугольника, правильнѣе употребить *элементы* треугольника.

Фиг. 50-я.



вапія называется *высотою* треугольника. Поэтому въ треугольникѣ ABC основаніе есть AC, а BD—высота, полагая, что BD перпендикулярна къ AC; если жъ принять BC за основаніе, то перпендикуляръ къ ней AF будетъ высота. Въ первомъ примѣрѣ высота BD падаетъ внутри треугольника ABC, а во второмъ примѣрѣ высота AF падаетъ внѣ треугольника ABC.

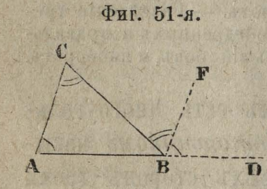
Предложеніе.

§ 87. *Сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

Предложеніе это составляетъ частный случай предложенія, опредѣляющаго сумму внутреннихъ угловъ всякаго многоугольника (§ 83). Дѣйствительно, число сторонъ треугольника равно 3; слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ, повтореннымъ три безъ двухъ, (3—2), раза, или 1 разъ; и такъ получимъ два прямыхъ.

Примѣчаніе. Вотъ другое доказательство этого предложенія.

Фиг. 51-я.



Возьмемъ какой нибудь треугольникъ ABC. Продолжимъ сторону AB, и черезъ точку B проведемъ прямую BF, параллельную боку AC. Вслѣдствіе параллельности линій AC и BF, при сѣкущей AD, имѣемъ равные соотвѣтственные углы

$$\angle A = \angle DBF;$$

а при сѣкущей BC имѣемъ равные внутренніе противоположные углы

$$\angle C = \angle CBF.$$

Сумма послѣдовательныхъ угловъ при точкѣ B, по одну сторону прямой AD, равна двумъ прямымъ угламъ, т. е.

$$\angle ABC + \angle CBF + \angle DBF = 2d,$$

слѣдовательно
$$\angle ABC + \angle C + \angle A = 2d.$$

Сумма внѣшнихъ угловъ треугольника, какъ и всякаго многоугольника, равна четыремъ прямымъ (§ 82).

§ 88. **Слѣдствіе I.** Дополненіемъ до двухъ прямыхъ къ суммѣ угловъ A и C треугольника ABC (фиг. 51) служитъ третій уголъ ABC, который служитъ также дополненіемъ до двухъ прямыхъ и внѣшнему углу CBD (§ 37); слѣдовательно $\angle CBD = \angle A + \angle C$ (§ 34), т. е. *внѣшній уголъ треугольника равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ съ нимъ несмежныхъ.*

§ 89. Слѣдствіе II. *Если два угла треугольника соотвѣтственно равны двумъ угламъ другого треугольника, то и третьи углы равны между собою;* потому что эти послѣдніе углы будутъ имѣть равныя дополненія до двухъ прямыхъ, именно суммы остальныхъ двухъ угловъ.

§ 90. Слѣдствіе III. *Въ треугольникѣ только одинъ уголъ можетъ быть прямымъ или тупымъ.*

На основаніи этого свойства, треугольники, по угламъ, дѣлятся на три рода.

Треугольникъ называется *прямоугольнымъ треугольникомъ,* если въ немъ есть прямой уголъ. Причемъ бокъ, противолежащій прямому углу, называется *ипотенузою,* а остальные два бока — *катетами.* Такъ, если уголъ A прямой, то BC — ипотенуза, а AC и AB — катеты.

Фиг. 52-я.

§ 91. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма острыхъ угловъ равна прямому углу;* потому что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ равна двумъ прямымъ.

Треугольникъ называется *тупоугольнымъ треугольникомъ,* если въ немъ есть тупой уголъ.

Въ *остроугольномъ* треугольникѣ всѣ углы острые.

Треугольникъ, въ которомъ нѣтъ прямаго угла, называется *косоугольнымъ;* слѣдовательно косоугольный треугольникъ можетъ быть тупоугольный и остроугольный.

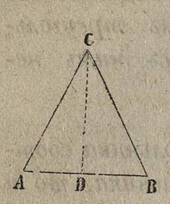
Предложеніе.

§ 92. *Равнымъ угламъ треугольника противолежатъ равные бока.*

Возьмемъ треугольникъ ABC и положимъ, что $\angle A = \angle B$; докажемъ, что $BC = AC$ (фиг. 53).

Вообразимъ, что уголъ C раздѣленъ пополамъ прямою CD, тогда въ треугольникахъ ACD и BCD, имѣющихъ по два равные угла, именно $A=B$, $ACD=BCD$, третій уголъ $ADC=\angle CDB$ (§ 89). При такихъ условіяхъ, если согнемъ чертежъ на линіи CD, какъ на оси, тогда, по равенству угловъ при C, прямая CB пойдетъ по CA; а по равенству прямыхъ угловъ, прямая DB пойдетъ по DA; поэтому точка B, будучи одновременно на двухъ прямыхъ AC и AD, совпадетъ съ пересѣченіемъ ихъ A, слѣд. $AC=CB$.

Фиг. 53-я.



Замѣтимъ, что CD, дѣлящая пополамъ уголъ C треугольника ABC, перпендикулярна къ AB; притомъ, она дѣлитъ пополамъ бокъ AB, ибо DB совмѣстилась съ DA.

Вообще прямая, дѣлящая какой нибудь уголъ пополамъ называется *равно-дѣлящею уголъ*.

Предложеніе (обратное).

§ 93. *Равнымъ бокамъ треугольника противолежатъ равные углы* (фиг. 53).

Пусть въ треугольникѣ ABC бокъ $AC=BC$; докажемъ, что $\angle B=\angle A$.

Вообразимъ, что уголъ C раздѣленъ пополамъ прямою CD; на бокахъ равныхъ угловъ ACD и BCD отложены равныя части $CD=CD$, $CB=CA$, и точки отложенія соединены прямыми BD и AD; то эти соединяющія прямыя съ равными боками BC и AC образуютъ равные углы B и A (§ 24). Также $\angle BDC=\angle ADC$ (§ 24); слѣд. прямая CD, равно-дѣлящая уголъ C треугольника ABC, перпендикулярна къ AB.

§ 94. Треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны между собою, называется *равнобедреннымъ*.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ сторона, неравная двумъ другимъ, чаще принимается за основаніе.

Вслѣдствіе предложенія параграфа 93-го, *въ равнобедренномъ треугольникѣ, углы при основаніи равны между собою. Высота проходитъ черезъ середину основанія и дѣлитъ пополамъ уголъ при вершинѣ*, что ясно изъ доказательства предложенія параграфа 93-го.

Треугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою, называется *равностороннимъ*.

А какъ равнымъ бокамъ треугольника противолежатъ равные углы, то въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ углы также равны между собою. Поэтому, равносторонній треугольникъ есть въ то же время и *равноугольный*.

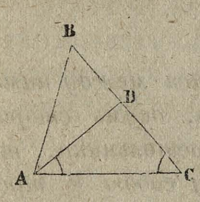
Равносторонній треугольникъ, по причинѣ равенства его угловъ, называется также *правильнымъ треугольникомъ*.

Предложеніе.

§ 95. *Большему углу въ треугольникѣ противолежитъ большій бокъ.*

Возьмемъ треугольникъ ABC и положимъ, что $\angle CAB > \angle C$; докажемъ, что бокъ $BC > AB$. Въ большемъ углѣ нанесемъ меньшій при бокѣ AC и вершинѣ A: положимъ, что уголъ $CAD = C$. Въ треугольникѣ ACD противъ равныхъ угловъ C и A лежатъ равныя стороны $AD = CD$ (§ 92). Прямая AB короче ломанной ADB, т. е.

Фиг. 54-я.



$$AB < AD + BD;$$

поставивъ, вмѣсто AD, ей равную CD, получимъ

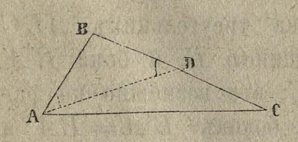
$$AB < CD + BD \text{ или } AB < BC.$$

Предложеніе (обратное).

§ 96. *Большему боку въ треугольникѣ противолежитъ большій уголъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC бокъ $BC > AB$; докажемъ, что $\angle BAC > \angle C$. На большемъ бокѣ, отъ вершины B, нанесемъ меньшій бокъ; пусть $BD = AB$, при чемъ точка D должна находиться между точками B и C; поэтому прямая AD будетъ лежать въ углѣ BAC; значитъ $\angle BAC > \angle BAD$; а этотъ послѣдній равенъ углу ADB, ибо въ треугольникѣ ABD противъ равныхъ боковъ лежатъ равные углы (§ 93); притомъ уголъ ADB, какъ внѣшній для треугольника ACD больше несмежнаго съ нимъ угла C (§ 88); слѣд. и подавно $\angle BAC > \angle C$.

Фиг. 55-я,



8. Равенство треугольниковъ; части достаточныя для ихъ опредѣленія. — Два треугольника равноугольны, когда ихъ стороны взаимно и соотвѣтственно перпендикулярны или параллельны.

§ 97. *Сходственными углами* двухъ треугольниковъ называются углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, одинъ въ одномъ треугольникѣ, другой въ другомъ; а *сходственными* боками называются стороны, лежащія противъ равныхъ угловъ. Такъ, если бокъ $AB = A'B'$, то уголъ C сходственный съ C'. Если уголъ $A = A'$, то стороны BC и $B'C'$ будутъ сходственныя.

Фиг. 56-я.

Предложеніе.

§ 98. *Если двѣ стороны и заключающійся между ними уголъ въ одномъ треугольникѣ равны, порознь, двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники также равны* (§ 85).

Пусть $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle B = \angle B'$;
доказать, что 1) $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, $C = C'$.

На сторонахъ равныхъ угловъ B и B' отложены равныя части $BA = B'A'$, $BC = B'C'$, и точки отложенія соединены прямыми AC и $A'C'$; слѣд., на основаніи предложенія § 24, эти соединяющія прямыя будутъ равны между собою, т. е. $AC = A'C'$, и съ равными боками образуютъ соотвѣтственно равные углы, т. е. $\angle A = \angle A'$ и $\angle C = \angle C'$.

2) Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на треугольникъ ABC такъ, чтобы вершина B' совпала съ вершиною B, а бока $B'A'$ и $B'C'$ пошли бы по бокамъ BA и BC; это возможно по равенству угловъ B и B', а по равенству боковъ $B'A' = BA$ и $B'C' = BC$, точка A' совпадаетъ съ A, и C' съ C, а вслѣдствіе этого и прямая $A'C'$ совмѣстится съ AC; поэтому треугольникъ $A'B'C'$ равенъ треугольнику ABC (§ 85).

§ 99. Слѣдствіе. *Если два катета одного треугольника равны, порознь, двумъ катетамъ другого треугольника,*

то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.

И дѣйствительно, углы, заключающіеся между катетами, равны между собою, какъ прямые.

Предложеніе.

§ 100. *Если сторона и прилежащіе къ ней два угла одного треугольника равны, порознь, сторонѣ и прилежащимъ къ ней угламъ въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.*

Пусть $AC = A'C'$, уголъ $A = A'$ и уголъ $C = C'$; докажемъ:

1) Что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы вершины A' и C' совмѣстились, первая съ A, а вторая съ C; это возможно по равеству сторонъ AC и $A'C'$. По равенству угловъ A и A', сторона $A'B'$ пойдетъ по AB; а по равенству угловъ C и C', сторона $C'B'$ по CB. Поэтому точка B' должна одновременно лежать на двухъ прямыхъ линіяхъ, AB и CB, слѣдовательно она упадетъ въ точку ихъ пересѣченія B. Итакъ, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, потому что концы этихъ линій совмѣстились; а также $\angle B = \angle B'$, потому что вершины ихъ и бока совмѣстились. Впрочемъ, равенство угловъ B и B' слѣдуетъ непосредственно, безъ наложенія, изъ замѣчанія, сдѣланнаго въ § 89.

2) Треугольники также равны, потому что ихъ вершины и бока совмѣщены.

§ 101. Слѣдствіе. *Если катетъ и прилежащій острый уголъ одного треугольника равны, порознь, катету и прилежащему острому углу въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны и самые треугольники равны.*

Прямые углы треугольниковъ равны между собою, слѣд. находимся въ условіяхъ предъидущаго предложенія (§ 100).

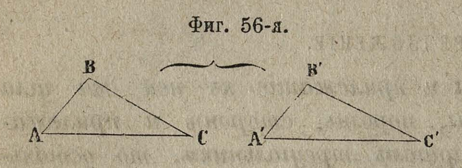
Предложеніе.

§ 102. *Если сторона и два какіе нибудь угла одного треугольника равны, порознь, сторонѣ и двумъ угламъ въ*

другомъ треугольникѣ, притомъ, если эти стороны сходственныя, то и остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.

Положимъ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ и $AC = A'C'$. Доказать, что $\angle C = \angle C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Третіе углы C и C' равны между собою (§ 89). Итакъ, въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, $AC = A'C'$ и два прилежащіе угла соотвѣтственно равны, $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$; по этому имѣемъ условія предложенія § 100.

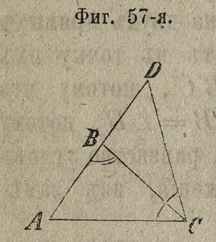
Фиг. 56-я.



* *Примѣчаніе.* Для равенства треугольниковъ *недостаточно* равенства двухъ угловъ и какой-нибудь стороны въ треугольникахъ; необходимо, чтобы равныя стороны были сходственныя, т. е. лежали противъ равныхъ угловъ.

Возьмемъ какой-нибудь треугольникъ ABC. При точкѣ C на бокѣ CA вообразимъ уголъ ACD, равный углу ABC. Сравнивая части треугольниковъ ABC и ACD, находимъ, что сторона AC и два угла A и B треугольника ABC соотвѣтственно равны сторонѣ AC и двумъ угламъ A и ACD треугольника ACD; но очевидно, что онѣ принадлежатъ совершенно разнымъ треугольникамъ. Здѣсь равныя стороны $AC = AC$ не сходственныя, ибо противъ AC въ треугольникѣ ABC лежитъ уголъ ABC, а въ треугольникѣ ADC противъ нея лежитъ уголъ D; углы же эти неравны, потому что $\angle ABC$, какъ внѣшній для треугольника ABC, больше угла D.

Фиг. 57-я.



§ 103. Слѣдствіе I. *Если катетъ и противолежащій ему острый уголъ одного треугольника равны катету и противолежащему острому углу другого треугольника, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.*

Дѣйствительно, кромѣ острыхъ угловъ, равныхъ по условію, прямые углы равны между собою, притомъ катеты по условію сходственные; слѣд. находимся въ условіяхъ предложенія § 102.

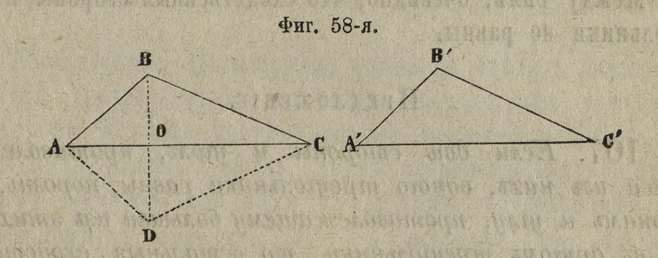
§ 104. Слѣдствіе II. *Если ипотенуза и острый уголъ одного треугольника равны ипотенузѣ и острому углу другого треугольника, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны;* потому что прямые углы равны между собою; слѣд. ипотенузы суть сходственныя стороны и на основаніи предложенія § 102, остальныя сходственныя части и треугольники равны.

Предложеніе.

§ 105. *Если три стороны одного треугольника равны, порознь, сторонамъ другого треугольника, то и сходственные углы равны между собою и треугольники равны.*

Пусть въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $AC = A'C'$. Докажемъ: 1) что $\angle BAC = \angle A'$, $\angle ABC = \angle B'$

Фиг. 58-я.



и $\angle ACB = \angle C'$. Треугольникъ $A'B'C'$ перемѣстимъ такъ, чтобы точки A' и C' соотвѣтственно совмѣстились съ точками A и C, а вершина B' пришлась бы по сю сторону бока AC; пусть D означаетъ принятое положеніе точки B'; слѣдовательно треугольникъ $A'C'B'$ перемѣстился въ ADC, и бокъ $A'B' = AD$, $B'C' = CD$. Такъ какъ, по условію, бокъ $AB = A'B'$ и $AD = A'B'$, то $AB = AD$; слѣд. треугольникъ ABD равнобедренный, а потому (§ 93)

$$\angle ABD = \angle ADB;$$

а вслѣдствіе равенства $BC = CD$, на основаніи § 93, въ треугольникѣ BCD

$$\angle DBC = \angle BDC;$$

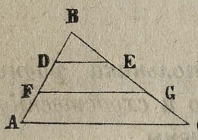
поэтому $$\angle ABD + \angle DBC = \angle ADB + \angle BDC$$

или $$\angle ABC = \angle ADC;$$

а на основаніи построенія, $\angle ADC = \angle B'$. Итакъ, въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ имѣемъ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$, слѣд. находимся въ условіяхъ предложенія § 98.

§ 106. *Примѣчаніе.* Обратное предъидущему предложенію вообще не вѣрно, т. е. если углы одного треугольника равны угламъ другого треугольника, то изъ этого не слѣдуетъ заключать о равенствѣ сторонъ треугольниковъ.

Фиг. 59-я.



И дѣйствительно, проведя хорды DE и FG въ треугольникѣ ABC параллельно боку AC, получимъ треугольники BDE и BFG, въ которыхъ углы равны угламъ треугольника ABC, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ линіяхъ AC, DE и FG, и сѣкущей AB, съ одной стороны, и сѣкущей BC съ другой, а уголъ B — общій всѣмъ треугольникамъ. Между тѣмъ, очевидно, что сходственныя стороны и самые треугольники не равны.

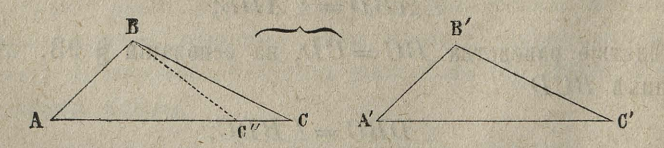
Предложеніе.

§ 107. *Если двѣ стороны и уголъ, противолежащій большей изъ нихъ, одного треугольника равны, порознь, двумъ сторонамъ и углу, противолежащему большей изъ этихъ сторонъ, въ другомъ треугольникѣ, то остальныя сходственныя части равны между собою и самые треугольники равны.*

Пусть въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $BC > AB$, слѣд. и $B'C' > A'B'$; надо доказать, что сходственныя части и треугольники равны.

Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на треугольникъ ABC такъ, чтобы вершина A' совпала съ вершиною A, бокъ $A'B'$ пошелъ бы по боку AB; по равенству этихъ боковъ, вершина B' со-

Фиг. 60-я.



впадетъ съ вершиною B; по равенству угловъ A и A', бокъ $A'C'$ пойдетъ по боку AC; слѣд. вершина C' будетъ лежать на

бокѣ AC или на его продолженіи. Надо доказать, что вершина C' совпадаетъ съ вершиною C; положимъ противное и пусть, напримѣръ, точка C' упала въ точку C''. Соединивъ точку C'' съ точкою B, получимъ треугольникъ ABC'', который представляетъ перемѣщенный треугольникъ $A'B'C'$; слѣд. $BC''=B'C'$; а какъ по условію, бокъ $B'C'=BC$, то заключаемъ, что $BC''=BC$. Поэтому треугольникъ BCC'' равнобедренный, слѣд. $\angle C=\angle BC''C$; но этотъ послѣдній уголъ есть внѣшній для треугольника ABC''; слѣд. $\angle BC''C>\angle A$, значитъ и $\angle C>\angle A$, что противно условію. Итакъ, нельзя допустить, что вершина C' упадетъ въ точку C'' по сю сторону точки C. Такъ же объяснимъ, что вершина C' не можетъ находиться на продолженіи AC, т. е. по другую сторону точки C. Вслѣдствіе всего выше сказаннаго, при наложеніи треугольника $A'B'C'$ на ABC, вершина C' упадетъ въ вершину C, и треугольникъ $A'B'C'$ совмѣстится съ треугольникомъ ABC; значитъ $AC=A'C'$, $\angle ABC=\angle A'B'C'$ и $\angle C=\angle C'$.

* *Примѣчаніе.* Посмотримъ, можно ли сдѣлать заключеніе о равенствѣ треугольниковъ во всѣхъ частяхъ при условіи, что двѣ стороны и уголъ противолежащій *меньшей* изъ нихъ одного треугольника равны, порознь, двумъ сторонамъ и углу, противолежащему *меньшей* изъ нихъ въ другомъ треугольникѣ?

Возьмемъ треугольникъ ABC и положимъ, что $AB<BC$, слѣд. и $\angle C<\angle A$. Изъ вершины B проведемъ $BD\perp AC$. Отложимъ $DF=AD$; такъ какъ наклонная AB меньше наклонной BC, то точка F упадетъ между точками D и C (§ 51, 2-я). Въ треугольникахъ ABC и BCF имѣемъ $AB=BF$, $BC=BC$, $\angle C=\angle C, \angle C<\angle A$; значитъ двѣ стороны одного треугольника равны, порознь, двумъ сторонамъ другого треугольника и углы, противулежащіе меньшимъ сторонамъ, равны; но очевидно, что треугольникъ ABC не равенъ треугольнику BCF.

Фиг. 61-я.

§ 108. Слѣдствіе. *Если ипотенуза и катетъ одного треугольника равны, порознь, ипотенузѣ и катету другого треугольника, то остальныя сходственныя части равны между собою и треугольники равны.*

Дѣйствительно, ипотенуза лежитъ противъ прямаго угла, а катетъ противъ остраго, слѣд. первый уголъ больше втораго, и

онъ равенъ прямому углу въ другомъ треугольникѣ; слѣд. находимся въ условіяхъ предъидущаго предложенія (§ 107).

§ 109. Мы видѣли, что треугольники равны, если въ нихъ соотвѣтственно равны:

1) двѣ стороны и между ними уголъ (§ 98),
2) сторона и два прилежащіе къ ней угла (§ 100),
3) два угла и сходственная сторона (§ 102),
4) три стороны (§ 105),
5) двѣ стороны и уголъ противъ большей изъ нихъ (§ 107),
6) ипотенуза и острый уголъ (§ 104),
7) ипотенуза и катетъ (§ 108),
8) Катетъ и уголъ прилежащій (§ 101) или противолежащій (§ 103).

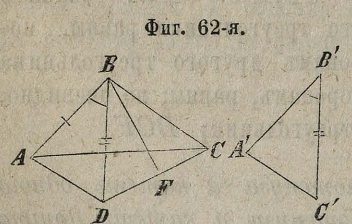
Слѣдовательно, каждыя изъ упомянутыхъ частей опредѣляютъ треугольникъ. Напримѣръ, треугольникъ вполнѣ опредѣленъ, если даны по величинѣ двѣ стороны и уголъ между ними; потому что всѣ треугольники, построенные съ соблюденіемъ этого условія, будутъ во всѣхъ частяхъ равны и слѣдовательно составятъ одинъ и тотъ же треугольникъ.

Предложеніе.

§ 110. *Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны одного соотвѣтственно равны сторонамъ другого треугольника, а углы между ними не равны, то большему углу противолежитъ и большая сторона.*

Пусть въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ бокъ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, а $\angle ABC > \angle A'B'C'$; докажемъ, что бокъ AC больше бока $A'C'$. Наложимъ треугольникъ $A'B'C'$ на ABC такъ, чтобы равные бока $A'B'$ и AB совмѣстились: бокъ $B'C'$ пойдетъ внутри угла ABC, потому что $\angle B' < \angle ABC$; пусть BD означаетъ бокъ $B'C'$; слѣд. $AD = A'C'$. Поэтому, докажемъ, что $AD < AC$.

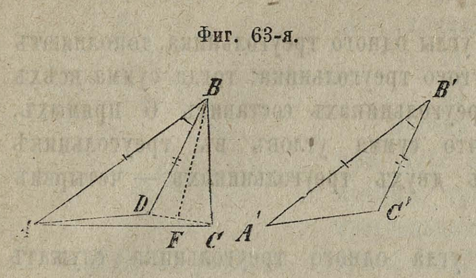
Фиг. 62-я.



Соединимъ точки C и D прямою CD, а изъ ея середины F возставимъ перпендикуляръ къ CD: онъ пройдетъ черезъ точку B, ибо $BC = BC$ (§ 55). Точка A лежитъ внѣ этого перпендикуляра; слѣд. она ближе къ тому концу D прямой

CD, который съ точкою A находится по одну сторону перпендикуляра (§ 54, 2-я); слѣд. $AD < AC$.

Фиг. 63-я.



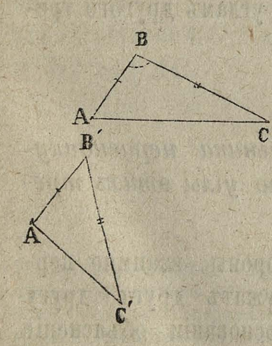
Предъидущее доказательство выведено въ томъ предположеніи, что, при наложеніи треугольника $A'B'C'$ на треугольникъ ABC, точка C' пришлась въ точкѣ D *внѣ* треугольника ABC; но оно примѣняется слово въ слово и къ тому случаю, когда точка C' придется въ точкѣ D *внутри* треугольника ABC, какъ показано на приложенной фигурѣ.

Предложеніе (обратное).

§ 111. *Если въ двухъ треугольникахъ двѣ стороны соотвѣтственно равны, а третьи стороны не равны, то большей сторонѣ противолежитъ большій уголъ.*

Положимъ, что въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $AC > A'C'$; надобно доказать, что $\angle B > \angle B'$. Нельзя допустить, что $\angle B = \angle B'$, потому что тогда будемъ имѣть условія предложенія, изложеннаго въ § 98; слѣд. AC и $A'C'$ были бы равныя, что противно условію. Нельзя также положить, что уголъ $\angle B < \angle B'$, потому что тогда, на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 110, надо допустить, что сторона, лежащая противъ угла B, меньше стороны противолежащей углу B', т. е. $AC < A'C'$, и это противно условію. И такъ, уголъ B не можетъ быть ни равенъ углу B', ни меньше его, слѣдовательно уголъ B больше угла B'.

Фиг. 64-я.



Предложеніе.

§ 112. *Если стороны одного треугольника параллельны сторонамъ другого треугольника, то углы этихъ треугольниковъ соотвѣтственно равны.*

Мы уже видѣли, что два угла, которыхъ бока параллельны, равны между собою или взаимно дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ (§ 78).

1) Положимъ, что всѣ углы одного треугольника дополняютъ до двухъ прямыхъ углы другого треугольника; тогда сумма всѣхъ шести угловъ въ обоихъ треугольникахъ составитъ 6 прямыхъ, а это невозможно, потому что сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ, а въ двухъ треугольникахъ — четыремъ прямымъ.

2) Положимъ, что два угла одного треугольника служатъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ двумъ угламъ въ другомъ треугольникѣ, а третьи углы равны между собою: сумма первыхъ четырехъ угловъ составитъ четыре прямые, слѣдовательно сумма всѣхъ шести угловъ будетъ больше четырехъ прямыхъ, что невозможно.

3) Нельзя положить, что одинъ уголъ служитъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ углу въ другомъ треугольникѣ, а два остальные угла въ обоихъ треугольникахъ равны между собою; потому что равенство этихъ послѣднихъ влечетъ равенство и первыхъ (§ 89). Въ одномъ только случаѣ одинъ уголъ можетъ служить дополненіемъ до двухъ прямыхъ другому углу, когда эти углы прямые; но все-таки они равны между собою.

Итакъ, углы одного треугольника равны угламъ другого треугольника.

Предложеніе.

§ 113. *Если стороны одного треугольника перпендикулярны сторонамъ другого треугольника, то углы этихъ треугольниковъ соотвѣтственно равны.*

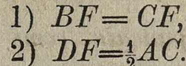
Извѣстно, что два угла, которыхъ стороны взаимно перпендикулярны, равны между собою или служатъ другъ другу дополненіемъ до двухъ прямыхъ; на этомъ основаніи объясненіе будетъ то же, что и въ предъидущемъ предложеніи.

Предложеніе.

§ 114. *Хорда треугольника, проведенная параллельно его основанію черезъ середину одного бока, раздѣляетъ другой бокъ пополамъ и равна половинѣ основанія.*

Возьмемъ какой нибудь треугольникъ ABC; пусть точка D означаетъ середину бока AB; проведемъ хорду DF параллельно основанію AC; докажемъ, что

Фиг. 65-я.



1) $BF = CF$,

2) $DF = \frac{1}{2}AC$.

Черезъ точку D проведемъ прямую DG параллельно боку BC, получимъ треугольникъ ADG равный треугольнику BDF; дѣйствительно, $AD = BD$, по условію, $\angle A = \angle BDF$, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ линіяхъ DF и AC и сѣкущей AB, $\angle ADG = \angle B$, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ DG и BC при той же сѣкущей AB; поэтому

$$BF = DG.$$

Части параллельныхъ, заключающіяся между параллельными, равны между собою (§ 74), значитъ

$$DG = CF.$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ заключаемъ, что $BF = CF$.

Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ имѣемъ

$$DF = AG,$$

но $$DF = CG \text{ (§ 74)};$$

слѣд. $AG = CG$; отсюда слѣдуетъ, что $AG = \frac{1}{2}AC$; слѣдов. и $DF = \frac{1}{2}AC$.

---

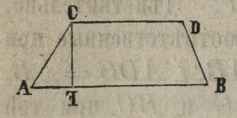
9. Четыреугольники. — Трапеція, ея основанія и высота. — Свойства хорды трапеціи, проведенной параллельно основаніямъ черезъ середину одного изъ боковъ. — Параллелограммъ: равенство противолежащихъ угловъ въ параллелограммѣ; свойства его діагоналей. — Равенство параллелограммовъ. — Ромбъ или лозанжъ и прямоугольникъ. — Свойства ихъ діагоналей. — Равенство прямоугольниковъ. — Квадратъ.

§ 115. Извѣстно (§ 84), что четыреугольникомъ называется часть плоскости, ограниченная четырьмя прямыми, взаимно пересѣкающимися; или четыреугольникъ есть многоугольникъ о четырехъ бокахъ.

Сумма внутреннихъ угловъ четыреугольника равна четыремъ прямымъ, потому что 4 стороны безъ двухъ составляютъ 2; слѣдовательно, для полученія суммы внутреннихъ угловъ, надобно два прямые повторить 2 раза (§ 83), получимъ четыре прямые.

§ 116. *Трапеція есть четвероугольникъ, въ которомъ двѣ стороны параллельны, а остальныя двѣ не параллельны.*

Фиг. 66-я.



Такъ, если AB параллельна CD, а AC не параллельна BD, то четвероугольникъ $ABDC$ — трапеція.

Основаніями трапеціи называются два параллельные его бока, AB и CD; а *высотою* — разстояніе между основаніями, такъ, если CF перпендикулярна къ AB, то CF — высота трапеціи.

Предложеніе.

§ 117. *Хорда трапеціи, проведенная параллельно ея основаніямъ черезъ середину одного бока, раздѣляетъ діагональ и другой бокъ пополамъ, и равна полусуммѣ основаній.*

Пусть $ABDC$ — трапеція, въ которой AB параллельна CD, BC — ея діагональ. Черезъ середину M бока AC проведемъ хорду MN параллельно основаніямъ AB и CD. Докажемъ:

Фиг. 67-я.

1) что $CO = BO$ и $BN = DN$.

Такъ какъ въ треугольникѣ ABC хорда MO, проведенная черезъ середину AC, параллельна основанію AB, то $CO = BO$ (§ 114). Въ треугольникѣ BCD точка O есть середина бока BC, и $ON \parallel CD$, то $BN = DN$ (§ 114).

2) Докажемъ, что $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

На основаніи § 114 изъ треугольника ABC имѣемъ

$$MO = \tfrac{1}{2} AB,$$

а изъ треугольника BCD, $ON = \frac{1}{2} CD$;

изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ

$$MO + ON = \tfrac{1}{2}(AB + CD)$$

или

$$MN = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

§ 118. Слѣдствіе. *Прямая, соединяющая середины непараллельныхъ боковъ трапеціи, параллельна ея основаніямъ.*

Дѣйствительно, на основаніи предъидущаго предложенія, прямая линія, проведенная черезъ середину одного изъ двухъ непараллельныхъ боковъ, параллельно къ основаніямъ трапеціи, должна пройти черезъ середину другаго бока; слѣд. она совмѣстится съ прямою, соединяющею упомянутыя середины, ибо положеніе прямой опредѣляется двумя точками.

§ 119. *Параллелограммомъ называется четвероугольникъ, въ которомъ противолежащіе бока параллельны по-парно.* Какія нибудь двѣ параллельныя стороны параллелограмма называются *основаніями*, а разстояніе между ними — *высотою* параллелограмма.

Предложеніе.

§ 120. *Четыреугольникъ будетъ параллелограммомъ, если двѣ противоположныя стороны его равны и параллельны между собою.*

Пусть AB равна и параллельна CD; докажемъ, что AC параллельна BD. Проведя діагональ CB, получимъ треугольникъ ABC, равный треугольнику BCD, ибо $\angle ABC = \angle BCD$ (§ 71, 3-е), $AB = CD$ и CB — общая; слѣд. $\angle CBD = \angle ACB$ (§ 98), а потому AC параллельна BD (§ 65, 3-е). И такъ четыреугольникъ $ABDC$ параллелограммъ (§ 119), потому что стороны его AB и CD, AC и BD, попарно параллельны.

Фиг. 68-я.

Предложеніе.

§ 121. *Четыреугольникъ будетъ параллелограммъ, если противолежащіе его бока по-парно равны между собою* (фиг. 68).

Пусть въ четыреугольникѣ $ABDC$, $AB = CD$, $AC = BD$; надобно доказать, что $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$.

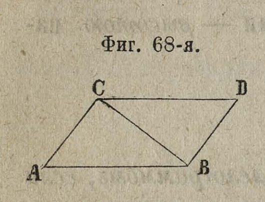
Проведя діагональ BC, получимъ два треугольника, ABC и BCD, которыхъ стороны соотвѣтственно равны: $AB = CD$, $AC = BD$, по условію, и BC — общая обоимъ треугольникамъ. Слѣдовательно противъ равныхъ сторонъ AB и CD лежатъ

равные углы ACB и CBD; а также противъ AC и BD лежатъ равные углы ABC и BCD (§ 105). По равенству первыхъ угловъ заключаемъ о параллельности боковъ AC и BD (§ 65, 3-е); по равенству угловъ ABC и BCD о параллельности другихъ двухъ боковъ AB и CD; слѣдовательно четвероугольникъ $ABDC$ — параллелограммъ (§ 119).

Предложенiе.

§ 122. *Въ параллелограммѣ противоположные бока, а также противоположные углы равны между собою.*

Фиг. 68-я.



Пусть $ABDC$ — параллелограммъ, значитъ $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$. Извѣстно (§ 74), что части параллельныхъ, заключающiяся между параллельными, равны между собою; слѣдовательно $AB=CD$, $AC=BD$.

Углы A и D равны между собою, потому что бока ихъ параллельны и оба направлены въ стороны противоположныя (§ 78). Тоже скажемъ и объ углахъ B и C.

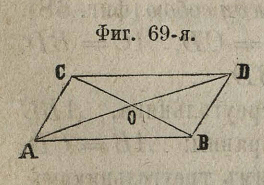
§ 123. Слѣдствiе. *Параллелограммъ дiагональю дѣлится пополамъ* (фиг. 68). По равенству сторонъ: $AB=CD$, $AC=BD$ и общей BC треугольникамъ ABC и BCD, самые треугольники равны (§ 105).

Предложенiе.

§ 124. *Дiагонали параллелограмма взаимно дѣлятся пополамъ.*

Пусть $ABDC$ — параллелограммъ. Проведемъ дiагонали AD и BC, и докажемъ, что $AO=OD$, $CO=BO$.

Фиг. 69-я.

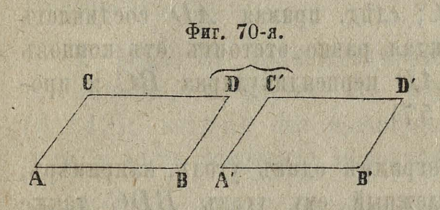


Въ треугольникахъ ABO и CDO стороны AB и CD равны (§ 122), и углы при нихъ равны: $\angle BAO=\angle CDO$, $\angle ABO=\angle DCO$, какъ внутреннiе противоположные при параллельныхъ линiяхъ и сѣкущихъ AD и BC; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны (§ 100), именно $BO=CO$ и $AO=DO$.

Предложеніе.

§ 125. *Если двѣ стороны и уголъ между ними одного параллелограмма равны, порознь, двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ параллелограммѣ, то остальныя части равны между собою, а также параллелограммы равны.*

Пусть въ параллелограммахъ $ABDC$ и $A'B'D'C'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$.



Фиг. 70-я.

Сперва докажемъ равенство угловъ, $\angle C = \angle C'$. Уголъ C дополняетъ уголъ A до двухъ прямыхъ (§ 71, 1-е); по той же причинѣ уголъ C' служитъ дополненіемъ до двухъ прямыхъ углу A'; но углы A и A', по условію, равны между собою, слѣдовательно $C = C'$ (§ 34). Также докажемъ равенство угловъ $B = B'$, $D = D'$.

Наложимъ параллелограммъ $A'B'D'C'$ на $ABDC$ такъ, чтобы концы бока $A'B'$ совпали съ A и B, — причемъ бокъ $A'C'$ пойдетъ по AC, ибо уголъ $A' = A$, и точка C' упадетъ въ C, потому что $A'C' = AC$. Бокъ $C'D'$ пойдетъ по CD, по равенству угловъ C и C'; по той же причинѣ $B'D'$ пойдетъ по BD, ибо $\angle B' = B$. Значитъ точка D', будучи одновременно на двухъ прямыхъ CD и BD, необходимо совпадетъ съ ихъ пересѣченіемъ D. И такъ $CD = C'D'$, $BD = B'D'$ и параллелограммъ $A'B'D'C'$ совмѣстится съ параллелограммомъ $ABDC$.

§ 126. Возьмемъ параллелограммъ, въ которомъ двѣ смежныя стороны, AB и AC, равны между собою; тогда другія двѣ стороны, CD и BD, будучи соотвѣтственно равны первымъ (§ 122), равны и между собою.

Фиг. 71-я.

Такимъ образомъ получится четвероугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою; такой четвероугольникъ называется ромбомъ (лозанжъ). И такъ, *ромбъ есть четвероугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что ромбъ есть въ тоже время и параллелограммъ, ибо противоположныя его стороны параллельны (§ 121). Поэтому всѣ свойства угловъ и боковъ

(§ 122) и діагоналей (§§ 123, 124) въ параллелограммѣ принадлежатъ также ромбу.

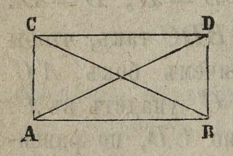
Предложеніе.

§ 127. *Діагонали ромба взаимно перпендикулярны* (фиг. 71).

Пусть $ABDC$ — ромбъ; надобно доказать, что діагонали AD и BC взаимно перпендикулярны. Вслѣдствіе опредѣленія ромба, $AB = AC$ и $DB = DC$; слѣд. прямая AD соединяетъ двѣ точки, изъ которыхъ каждая равно отстоитъ отъ концовъ B и C прямой BC; поэтому AD перпендикулярна BC и проходитъ черезъ ея середину (§ 57).

§ 128. Если въ параллелограммѣ одинъ уголъ, напримѣръ, BAC прямой, то и противоположный ему уголъ BDC также прямой (§ 122); уголъ ACD также прямой, потому что прямая AC, будучи перпендикулярна къ AB, перпендикулярна и къ параллельной ей CD (§ 72); по этой же причинѣ и уголъ ABD прямой. И такъ, въ параллелограммѣ $ABDC$ всѣ углы прямые, если только одинъ его уголъ прямой: такой параллелограммъ называется *прямоугольникомъ*.

Фиг. 72-я.



Поэтому *прямоугольникъ есть такой четвероугольникъ, въ которомъ всѣ углы прямые*. Отсюда слѣдуетъ, *что прямоугольникъ есть въ тоже время и параллелограммъ*; ибо противоположныя его стороны параллельны.

§ 129. Такъ какъ прямоугольникъ есть параллелограммъ, то всѣ свойства угловъ, сторонъ и діагоналей въ параллелограммѣ принадлежатъ также и прямоугольнику.

Предложеніе.

§ 130. *Діагонали прямоугольника равны между собою* (фиг. 73).

Пусть $ABDC$ — прямоугольникъ; докажемъ, что діагональ $AD = BC$. Въ треугольникахъ ACD и ACB, между равными сторонами ($CD = AB$, AC — общая) заключаются равные прямые углы, $\angle ACD = \angle CAB$; слѣдовательно остальныя сходственныя части треугольниковъ равны (§ 98), т. е. $AD = BC$.

Предложеніе.

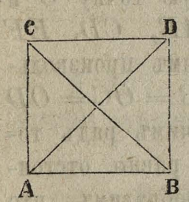
§ 131. *Прямоугольники равны между собою, если два смежные бока одного изъ нихъ равны, порознь, двумъ смежнымъ бокамъ другого прямоугольника.*

Въ самомъ дѣлѣ, углы между этими боками, какъ прямые, также равны; слѣдовательно, на основаніи предложенія о равенствѣ параллелограммовъ (§ 125), заключаемъ о равенствѣ прямоугольниковъ.

§ 132. Въ прямоугольникѣ одна изъ сторонъ называется *основаніемъ*, а другая, къ ней перпендикулярная, *высотою* (§ 119); поэтому *два прямоугольника равны между собою, если у нихъ основанія и высоты, порознь, равны.*

§ 133. Когда въ прямоугольникѣ двѣ смежныя стороны, AB и AC, равны между собою, то и двѣ другія, CD и BD, соотвѣтственно равныя первымъ, и между собою равны (§ 122); такой четвероугольникъ называется *квадратомъ*.

Фиг. 73-я.



И такъ, *квадратъ есть такой четвероугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою, а углы прямые.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что квадратъ есть въ тоже время и прямоугольникъ, ибо всѣ углы его прямые (§ 128); а слѣд. квадратъ есть также и параллелограммъ, ибо прямоугольникъ есть параллелограммъ. Онъ въ то же время есть ромбъ, ибо всѣ его стороны равны между собою. Поэтому всѣ свойства угловъ, сторонъ и діагоналей въ параллелограммѣ, въ ромбѣ и прямоугольникѣ принадлежатъ также и квадрату.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

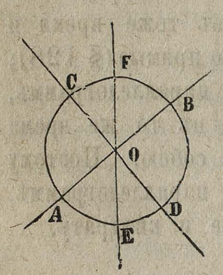
Круговая линія.

---

10. Окружность, центръ, радіусъ. — Опредѣленіе положенія окружности. — Діаметръ, хорда. — Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ пополамъ какъ хорду, такъ и соотвѣтствующую ей дугу и центральный уголъ.— Касательная.—Разстояніе отъ точки до окружности.

§ 134. Означимъ на плоскости произвольную точку O и черезъ нее проведемъ сколько угодно прямыхъ AB, CD, EF и т. д.; по этимъ прямымъ отъ точки O отложимъ произвольныя, но равныя части $OA = OB = OC = OD$ и т. д.; такимъ образомъ получимъ рядъ точекъ A, B, C, D и т. д., равно отстоящихъ отъ точки O. Если вообразимъ, что опредѣленная прямая OA обращается около точки O такъ, что конецъ ея A оставляетъ слѣдъ, то получимъ кривую линію, которой всѣ точки равно отстоятъ отъ точки O; линія эта называется *окружностью* или *круговою линіею*.

Фиг. 74-я.

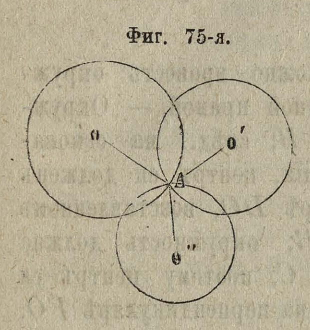


Точка O называется *центромъ*, а прямая OA — *радіусомъ*; при чемъ O есть *начало*, а A — *конецъ* радіуса. И такъ, *окружностью или круговою линіею называется такая кривая линія, которой всѣ точки равно удалены отъ одной точки*. Эта точка называется *центромъ*. *Радіусомъ* называется прямая, соединяющая центръ съ какою нибудь точкою окружности. Очевидно, что *всѣ радіусы окружности равны между собою*. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругомъ*.

§ 135. Очевидно, что отъ соединенія центра со всякою точкою, лежащею внутри круга, получимъ линію меньшую ра-

діуса; а отъ соединенія центра съ какою либо точкою, лежащею внѣ круга, получимъ разстояніе больше радіуса. Поэтому только точки окружности обладаютъ свойствомъ отстоять отъ центра на разстояніи радіуса. Вслѣдствіе этого говорятъ, что *геометрическое мѣсто точекъ, равно-удаленныхъ отъ данной точки, есть окружность* (§ 56).

Фиг. 75-я.

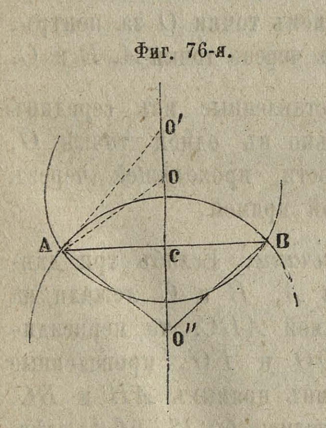


§ 136. *Черезъ данную точку A можно провести сколько угодно окружностей*: стоитъ только назначить произвольныя точки O, O' и т. д., соединить ихъ съ точкою A, и прямыя OA, $O'A$ и т. д. принять за радіусы, а точки O, O' и т. д. за центры; всѣ эти окружности пройдутъ черезъ данную точку A.

Предложеніе.

§ 137. *Черезъ двѣ данныя точки можно провести сколько угодно окружностей.*

Фиг. 76-я.



Пусть даны двѣ точки A и B, соединимъ ихъ прямою AB. Изъ середины C прямой AB возставимъ перпендикуляръ къ AB; всякая точка, O, O', O''..., этого перпендикуляра находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ точекъ A и B. Поэтому, если примемъ точки O, O', O'',... за центры, а OA, $O'A$, $O''A$.... послѣдовательно за радіусы и опишемъ ими окружности, то всѣ онѣ пройдутъ черезъ точки A и B.

Примѣчаніе. Всѣ точки перпендикуляра OC, возставленнаго изъ середины прямой AB, равно отстоятъ отъ ея концовъ A и B, а всякая точка, взятая внѣ этого перпендикуляра, неравно отстоитъ отъ точекъ A и B (§ 54); поэтому *геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ*

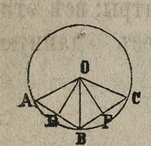
концы прямой, есть перпендикуляръ, возставленный изъ середины этой прямой.

Предложеніе.

§ 138. *Три точки, лежащія не на одной прямой линіи, опредѣляютъ окружность.*

1) Черезъ три точки A, B и C можно провесть окружность, если только онѣ не лежатъ на одной прямой. — Окружность должна пройти черезъ точки A и B; слѣд., на основаніи предъидущаго предложенія, центръ ея долженъ находиться на перпендикулярѣ DO, возставленномъ изъ середины прямой AB; окружность должна пройти и черезъ точки B и C; поэтому центръ ея долженъ находиться также и на перпендикулярѣ FO, возставленномъ изъ середины прямой BC. И такъ искомый центръ долженъ лежать въ пересѣченіи O упомянутыхъ перпендикуляровъ. Поэтому, если изъ срединъ прямыхъ AB и BC возставимъ перпендикуляры, которые, на основаніи § 79, должны пересѣчься, и точку пересѣченія O соединимъ съ данными точками A, B и C, то получимъ $OA = OB = OC$; слѣд., если примемъ точки O за центръ, а OA за радіусъ, то окружность пройдетъ черезъ точки A, B и C.

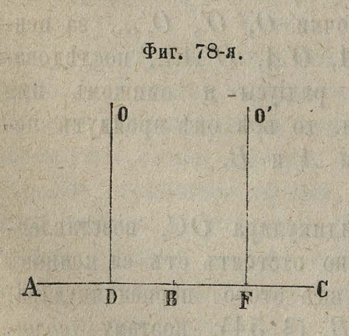
Фиг. 77-я.



2) Такъ какъ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ прямыхъ AB и BC, пересѣкаются только въ одной точкѣ O, то нельзя вообразить другой окружности, проходящей черезъ три данныя точки, лежащія не на одной прямой.

Примѣчаніе. Еслибъ три данныя точки A, B и C лежали на одной прямой ABC, то перпендикуляры DO и FO', проведенные изъ срединъ прямыхъ AB и BC, не встрѣтились бы (§ 66); слѣд. не получилась бы точка, равно отстоящая отъ точекъ A, B и C; значитъ и не было бы окружности, проходящей черезъ эти три точки.

Фиг. 78-я.

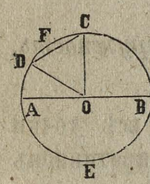


§ 139. *Дугою* называется всякая часть окружности; напримѣръ: *AB*, *BC*, *CD*, *AED* суть дуги. Очевидно, что *двѣ дуги одной и той же окружности равны между собою, если концы этихъ дугъ совмѣщаются*; потому что и всѣ точки этихъ дугъ, находящіяся между ихъ концами, тоже совмѣстятся. *Хордою* называется прямая, соединяющая концы дуги; напримѣръ прямая *BC* есть хорда.

Фиг. 79-я.

Всякая хорда дѣлитъ кругъ на двѣ части: каждая изъ нихъ называется *сегментомъ*. И такъ, *сегментомъ называется часть круга, заключающаяся между хордою и соотвѣтствующею ей дугою*; напримѣръ *DFCD*, *DECD*.

Фиг. 80-я.

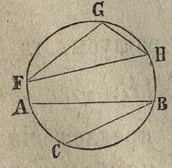


§ 140. Отъ соединенія центра съ концами какой нибудь дуги образуется уголъ, называемый центральнымъ. И такъ, *центральнымъ угломъ называется уголъ, образуемый двумя радіусами*; напримѣръ уголъ *DOC*.

Секторомъ называется часть круга, заключающаяся между дугою окружности и двумя радіусами, проходящими черезъ концы этой дуги; напримѣръ *ODFCO*.

§ 141. *Уголъ, котораго вершина на окружности, а бока пересѣкаютъ ее, называется вписаннымъ угломъ въ окружности*; напримѣръ уголъ *ABC*.

Фиг. 81-я.

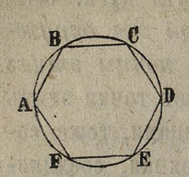


Уголъ, называется вписаннымъ въ сегментѣ, когда его вершина находится на дугѣ сегмента, а бока проходятъ черезъ концы этой дуги; напримѣръ уголъ *FGH* — вписанъ въ сегментѣ *FHGF*.

Очевидно, что уголъ, вписанный въ сегментѣ, будетъ въ тоже время уголъ вписанный въ кругѣ.

§ 142. *Многоугольникъ называется вписаннымъ въ кругѣ, если всѣ его вершины находятся на окружности*; напримѣръ многоугольникъ *ABCDEF*.

Фиг. 82-я.



При этомъ кругъ относительно многоугольника называется описаннымъ около многоугольника. И *такъ кругъ называется описаннымъ около многоугольника, если его окружность проходитъ черезъ всѣ вершины послѣдняго.*

§ 143. *Діаметромъ называется прямая, которая проходитъ черезъ центръ и оканчивается на окружности.*

Поэтому діаметръ состоитъ изъ двухъ радіусовъ, а слѣдовательно *въ кругѣ всѣ діаметры равны между собою.*

Предложеніе.

§ 144. *Діаметръ раздѣляетъ пополамъ какъ окружность, такъ и кругъ.*

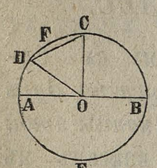
Согнемъ плоскость на діаметрѣ AB (фиг. 80); всѣ точки дуги AEB совпадутъ съ точками дуги ACB; въ противномъ случаѣ точки окружности были бы не на равныхъ разстояніяхъ отъ центра, — что невозможно.

Предложеніе.

§ 145. *Діаметръ больше всякой хорды въ томъ же кругѣ.*

Пусть AB — діаметръ, DC — хорда; надобно доказать, что AB больше DC. Проведемъ радіусы DO и CO. Прямыя CD короче ломанной COD, т. е.

Фиг. 80-я.



$$CD < DO + CO;$$

а какъ $DO = AO$, $CO = BO$, какъ радіусы, то

$$CD < AO + BO \text{ или } CD < AB.$$

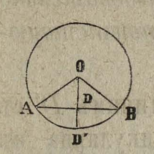
Примѣчаніе. На основаніи этого предложенія можно сказать, что *діаметръ есть наибольшая хорда.*

Предложеніе.

§ 146. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ пополамъ какъ хорду, такъ и соотвѣтствующіе ей центральный уголъ и дугу.*

Пусть O — центръ окружности и OD перпендикулярна къ хордѣ AB; надобно доказать: что $AD = DB$, $\angle AOD = \angle DOB$, и дуг. $AD' =$ дуг. BD'.

Фиг. 83-я.



Въ прямоугольныхъ треугольникахъ AOD и BDO ипотенузы равны $AO = BO$, какъ радіусы; катетъ OD — общій обоимъ треугольникамъ; слѣдовательно остальныя части этихъ треугольниковъ равны между собою (§ 108) и $AD = BD$; а также и углы, лежащіе противъ нихъ, равны, $\angle AOD = \angle DOB$. Согнемъ чертежъ по линіи OD': прямая DB пойдетъ по DA (§ 29) и точка B совпадетъ съ A, ибо $DB = DA$; и такъ концы дугъ BD' и AD' совпали, слѣдовательно эти дуги равны между собою.

Предложеніе.

§ 147. *Прямая, соединяющая центръ съ серединою хорды, перпендикулярна къ этой хордѣ и слѣдовательно* (§ 147) *дѣлитъ пополамъ соотвѣтствующіе ей центральный уголъ и дугу* (фиг. 83).

Пусть $AD = BD$; докажемъ, что $OD \perp AB$. Доказавъ это, на основаніи предъидущаго предложенія заключимъ, что $\angle AOD = \angle BOD$ и что дуг. $AD' =$ дуг. BD'.

Въ треугольникахъ ADO и BDO, сторона $AD = BD$, по условію; $AO = BO$, какъ радіусы; а DO общая; слѣдовательно, сходственные углы равны между собою (§ 105), т. е. $\angle ADO = \angle BDO$; а потому $DO \perp AB$.

Предложеніе.

§ 148. *Перпендикуляръ, возставленный къ хордѣ изъ ея середины, проходитъ черезъ центръ, и слѣдовательно* (§ 148) *дѣлитъ пополамъ центральный уголъ и дугу, соотвѣтствующіе хордѣ* (фиг. 83).

Радіусы AO и BO равны между собою; слѣдовательно точка O равно удалена отъ концовъ прямой AB; а потому она лежитъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ къ этой прямой изъ ея середины D (§ 55).

Предложенiе.

§ 149. *Прямая, соединяющая центръ съ серединою дуги, перпендикулярна къ соотвѣтствующей хордѣ, а слѣдовательно дѣлитъ пополамъ хорду и центральный уголъ, соотвѣтствующiе дугѣ* (фиг. 83).

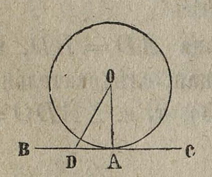
Пусть D' означаетъ середину дуги $AD'B$; соединимъ D' съ центромъ O и докажемъ, что прямая OD', перпендикулярна къ хордѣ AB. Согнемъ чертежъ по линiи OD; по равенству дугъ $D'B$ и $D'A$, точка B совпадетъ съ точкою A; поэтому и прямая DB совпадетъ съ DA; отсюда заключаемъ, что $\angle ODB = = \angle ODA$, и что $OD \perp AB$.

Предложенiе.

§ 150. *Если черезъ какую нибудь точку окружности провесть радiусъ и перпендикуляръ къ нему, то эта точка будетъ одна только общею для перпендикуляра и окружности; всѣ другiя точки перпендикуляра будутъ лежать внѣ окружности.*

Пусть OA — радiусъ, BC — перпендикуляръ къ нему въ точкѣ A; докажемъ, что прямая BC и окружность имѣютъ только одну общую точку A. На прямой BC возьмемъ какую нибудь точку D и соединимъ ее съ центромъ прямою OD. Такъ какъ OA перпендикулярна къ BC, то OD будетъ наклонною и слѣдовательно больше радiуса OA; отсюда слѣдуетъ, что D лежитъ внѣ круга. Все сказанное о точкѣ D примѣняется ко всѣмъ точкамъ прямой BC, кромѣ A, потому что D есть произвольная точка этой линiи. И такъ, всѣ точки прямой BC, за исключенiемъ A, лежатъ внѣ круга; слѣдовательно прямая BC имѣетъ одну только общую точку A съ окружностью.

Фиг. 84-я.



Предложенiе.

§ 151. *Прямая не можетъ имѣть съ окружностью больше двухъ общихъ точекъ.*

Если черезъ двѣ какiя нибудь точки, взатыя на окружности, проведемъ прямую, то эта прямая будетъ имѣть двѣ общiя точки

съ окружностью. Если бы допустили, что прямая съ окружностью имѣетъ еще третью общую точку, то, соединивъ эти три точки съ центромъ, получили бы три равныя линіи (§ 134), проведенныя изъ одной точки (центра) къ прямой, что невозможно (§ 52).

§ 152. Изъ предъидущихъ двухъ предложеній заключаемъ, что возможны только три положенія прямой относительно окружности:

1) прямая съ окружностью можетъ вовсе не имѣть общихъ точекъ.
2) прямая съ окружностью можетъ имѣть двѣ общія точки, въ этомъ случаѣ прямая называется *сѣкущею*.
3) прямая съ окружностью можетъ имѣть только одну общую точку, — такая прямая называется *касательною*, а общая точка — точкою *касанія* или *прикосновенія*.

Поэтому *касательною къ окружности называется прямая, имѣющая одну только общую точку съ окружностью.*

Вслѣдствіе этого опредѣленія, предложеніе параграфа 150 можно такъ выразить:

Предложеніе.

§ 153. *Прямая, проведенная перпендикулярно къ радіусу въ его концѣ, есть касательная къ окружности.*

Предложеніе.

§ 154. *Прямая, соединяющая центръ окружности съ точкою касанія, перпендикулярна къ касательной* (фиг. 84).

Пусть BC касательная къ окружности въ точкѣ A; надобно доказать, что OA, соединяющая точку касанія A съ центромъ O, перпендикулярна къ касательной BC. Всѣ точки касательной, за исключеніемъ A, лежатъ внѣ круга (§ 150); слѣдовательно разстояніе каждой изъ нихъ, напримѣръ D, до центра O будетъ больше радіуса OA; поэтому OA есть кратчайшее разстояніе отъ точки O до прямой BC, а потому OA перпендикулярна къ BC (§ 53).

Предложеніе.

§ 155. *Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, проходитъ черезъ точку касанія* (фиг. 84).

Дѣйствительно, если бъ этотъ перпендикуляръ не прошелъ черезъ точку касанія, то, соединивъ точку касанія съ центромъ, получили бы другой перпендикуляръ (154), опущенный изъ центра на касательную, что невозможно.

Предложеніе.

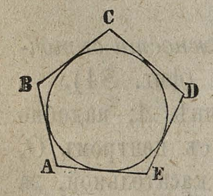
§ 156. *Перпендикуляръ, возставленный изъ точки касанія къ касательной, проходитъ черезъ центръ* (фиг. 84).

Въ самомъ дѣлѣ, если бъ этотъ перпендикуляръ оставилъ центръ въ сторонѣ, то, соединивъ центръ съ точкою касанія, имѣли бы два перпендикуляра (§ 154), возставленные изъ точки касанія въ касательной, что невозможно.

Прим. Черезъ точку, данную на прямой линіи. можно провести множество окружностей касательныхъ къ этой прямой въ данной точкѣ; центры этихъ окружностей будутъ лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ данной точкн къ данной прямой (§ 156). Поэтому *геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ къ данной прямой въ данной на ней точкѣ, есть перпендикуляръ, возставленный изъ данной точки къ данной прямой.*

§ 157. *Многоугольникъ называется описаннымъ около круга, если его бока суть касательныя къ окружности*; напримѣръ, многоугольникъ $ABCDE$— описанный.

Фиг. 85-я.



При этомъ кругъ относительно многоугольника называется вписаннымъ въ многоугольникѣ.

Поэтому *кругъ называется вписаннымъ въ многоугольникѣ, если къ его окружности касаются всѣ бока послѣдняго.*

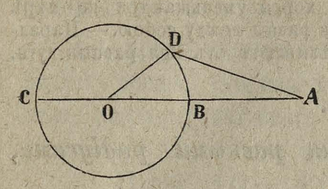
Предложеніе.

§ 158. *Наименьшая и наибольшая изъ всѣхъ прямыхъ, проведенныхъ отъ данной точки до точекъ окружности, находятся обѣ на прямой, проходящей черезъ центръ окружности.*

1) Положимъ, что данная точка A лежитъ внѣ окружности. Черезъ эту точку и центръ O проведемъ прямую до пере-

сѣченія съ окружностью въ точкахъ B и C; произвольную точку D окружности соединимъ съ точками A и O, и докажемъ, что $AB < AD$ и $AC > AD$. Соединивъ точку D съ центромъ, получимъ

Фиг. 86-я.



$$AB + OB < AD + OD;$$

отнявъ равныя $OB = OD$, получимъ

$$AB < AD.$$

Прямая AD короче ломанной AOD; слѣд.

$$AD < OA + OD;$$

вставивъ сюда OC, вмѣсто равной ей OD, получимъ

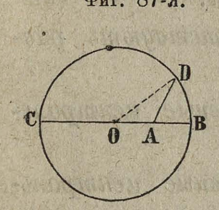
$$AD < OA + OC$$

или

$$AD < AC.$$

2) Положимъ, что данная точка A лежитъ внутри круга O. Проведемъ прямую черезъ центръ O и данную точку A до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ B и C; произвольную точку D окружности соединимъ съ точками A и O, и докажемъ, что $AD > AB$ и $AD < AC$. Прямая

Фиг. 87-я.



$$OD < OA + AD;$$

замѣнивъ радіусъ OD радіусомъ OB, который равенъ $OA + AB$, получимъ

$$OA + AB < OA + AD,$$

отсюда

$$AB < AD.$$

Прямая $AD < OA + OD$; вставивъ, вмѣсто радіуса OD, ему равный OC, получимъ $AD < OA + OC$

или

$$AD < AC.$$

---

11. Въ окружности, или въ окружностяхъ равныхъ радіусовъ, равенство одной изъ трехъ соотвѣтствующихъ частей: центральнаго угла, хорды и дуги, влечетъ за собою равенство двухъ прочихъ. — Центральные углы, хорды и дуги, увеличиваются, а слѣдовательно и уменьшаются вмѣстѣ; хорды уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ центра, а при одинаковомъ удаленіи равны между собою. — Параллельныя прямыя, пересѣкающія окружность, отрѣзываютъ отъ нея равныя дуги.

Предложеніе.

§ 159. *Окружности, описанныя равными радіусами, равны между собою.*

Въ самомъ дѣлѣ, если плоскость одной окружности наложить на другую, центромъ на центръ, то обѣ окружности совмѣстятся; въ противномъ случаѣ ихъ точки находились бы на неравныхъ разстояніяхъ отъ центра.

Вмѣстѣ съ тѣмъ понятно, что *и круги, описанные равными радіусами, равны между собою.*

Предложеніе.

§ 160. *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

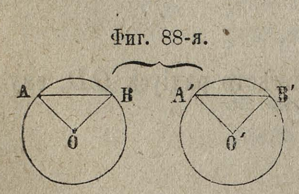
1) *равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя хорды и дуги;*

2) *равнымъ хордамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы и дуги;*

3) *равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы и хорды.*

1) Пусть радіусъ $AO = A'O'$ и центральный уголъ $O = O'$; надобно доказать, что хорда $AB = A'B'$ и дуг. $AB =$ дуг. $A'B'$.

Фиг. 88-я.



Въ треугольникахъ $ABO = A'B'O'$ между равными сторонами, $AO = A'O'$, $BO = B'O'$, заключаются равные углы $O = O'$; слѣдовательно остальныя части треугольниковъ равны между собою, и $AB = A'B'$, т. е. хорды равны.

Чтобы доказать равенство дугъ, наложимъ секторъ $A'O'B'$ на AOB такъ, чтобы центральные углы совмѣстились; тогда, по равенству радіусовъ въ обоихъ кругахъ, точка A' совпадетъ съ A и B' съ B. И какъ концы дуги $A'B'$ совмѣстились съ концами дуги AB, то и самыя дуги совмѣстятся, потому что онѣ описаны равными радіусами.

2) Пусть $AO = A'O'$ и хорда $AB = A'B'$; докажемъ равенство центральныхъ угловъ O и O'; а изъ этого равенства будетъ слѣдовать равенство дугъ, что сейчасъ было доказано наложеніемъ секторовъ.

Въ треугольникахъ ABO и $A'B'O'$ три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго: $AO = A'O'$ и $BO = B'O'$, какъ радіусы; наконецъ $AB = A'B'$, по условію; значитъ сходственные углы равны между собою; и такъ уголъ $O = O'$.

3) Пусть $AO = A'O'$ и дуга AB равна дугѣ $A'B'$; докажемъ, что центральные углы O и O' равны между собою; а отсюда будетъ слѣдовать равенство хордъ (§ 160, 1-е). Наложимъ секторъ $A'B'O'$ на ABO такъ, чтобы центры и радіусы $A'O'$ и AO совпали: по равенству радіусовъ, точка A' совпадетъ съ A; дуга $A'B'$ пойдетъ по AB, потому что онѣ описаны равными радіусами, причемъ точка B' совпадетъ съ B, ибо дуги равны. И такъ концы O' и B' прямой $B'O'$ совпали съ O и B, концами прямой BO; значитъ и самыя прямыя совмѣстятся. И такъ уголъ $O' = O$.

Предложеніе.

§ 161. *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1) *большему центральному углу соотвѣтствуютъ большая хорда и большая дуга;*

2) *большей хордѣ соотвѣтствуютъ большій центральный уголъ и большая дуга;*

3) *большей дугѣ соотвѣтствуютъ большій центральный уголъ и большая хорда.*

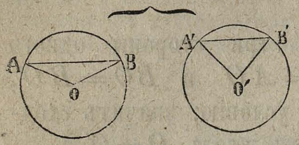
1) Пусть $AO = A'O'$ и $\angle O > \angle O'$; докажемъ, что хорда AB больше хорды $A'B'$ и дуга AB больше дуги $A'B'$.

Въ треугольникахъ ABO и $A'B'O'$, между равными сторонами, $AO = A'O'$, $BO = B'O'$, заключаются не равные углы, $\angle O > \angle O'$; слѣдовательно большему углу противолежитъ и большая сторона (§ 110); и такъ хорда AB больше $A'B'$.

Чтобы доказать неравенство дугъ AB и $A'B'$ наложимъ секторъ $A'B'O'$ на ABO такъ, чтобы центръ O' совпалъ съ O, и конецъ A' радіуса $A'O'$ совпалъ съ A; причемъ радіусъ

$O'B'$ пойдетъ внутри угла AOB, потому что $\angle O' \angle < O$; стало быть, точка B' упадетъ на дугу AB, между точками A и B; слѣдовательно дуга $A'B'$ меньше дуги AB.

Фиг. 89-я.



2) Пусть $AO = A'O'$, и хорда $AB > A'B'$; докажемъ, что центральный уголъ $O > O'$; а отсюда, на основаніи сейчасъ сказаннаго, заключаемъ, что дуга $AB >$ дуги $A'B'$.

Въ треугольникахъ ABO и $A'B'O'$ двѣ стороны равны между собою, $AO = A'O'$, $BO = B'O'$, а третьи стороны не равны, $AB > A'B'$; поэтому, на основаніи предложенія, изложеннаго въ § 111, заключаемъ, что противъ большей стороны лежитъ и большій уголъ; значитъ уголъ $O > O'$; а отсюда заключаемъ, что дуг. $AB >$ дуги $A'B'$ (1-е).

3) Пусть $AO = A'O'$, и дуга $AB >$ дуг. $A'B'$; докажемъ, что $\angle O > \angle O'$, а отсюда заключимъ, что хорда AB больше хорды $A'B'$ (§ 161, 1-е). Наложимъ секторъ $A'B'O'$ на секторъ ABO такъ, чтобы радіусы $A'O'$ и AO совмѣстились концами: дуга $A'B'$ пойдетъ по AB, потому что онѣ описаны равными радіусами; а какъ дуга $A'B'$ меньше дуги AB, то конецъ B' придется между A и B на дугѣ AB, и радіусъ $O'B'$ будетъ внутри угла AOB; слѣдовательно уголъ $O > O'$; а отсюда слѣдуетъ, что хорда $AB >$ хорды $A'B'$ (1-е).

Предложеніе.

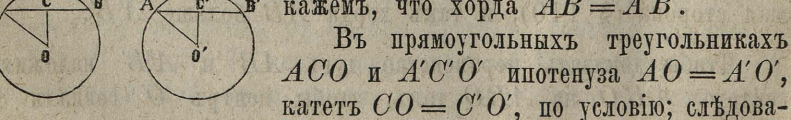
§ 162. *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1) *хорды, равно-удаленныя отъ центра, равны между собою;*

2) *обратно, равныя хорды равно-удалены отъ центра.*

1) Пусть $AO = A'O'$, и хорды AB и $A'B'$ равно удалены отъ центровъ, т. е. перпендикулярны OC и $O'C'$, опущенные изъ центровъ на эти хорды, равны между собою; докажемъ, что хорда $AB = A'B'$.

Фиг. 90-я.



Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ACO и $A'C'O'$ ипотенуза $AO = A'O'$, катетъ $CO = C'O'$, по условію; слѣдовательно и остальныя части равны (§ 108); значитъ $AC = A'C'$; но

AC составляетъ половину хорды AB (§ 147); по той же причинѣ $A'C'$ есть половина $A'B'$; а если половины равны, то и цѣлыя равны; слѣд. хорда $AB = A'B'$.

2) Пусть $AO = A'O'$, хорда $AB = A'B'$; докажемъ, что перпендикуляръ $OC = O'C'$.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ACO и $A'C'O'$ ипотенуза $AO = A'O'$, катеты AC и $A'C'$ также равны, потому что перпендикуляры OC и $O'C'$, проведенные изъ центровъ на хорды AB и $A'B'$ дѣлятъ ихъ пополамъ; а какъ самыя хорды равны, то и половины ихъ равны. И такъ остальныя части треугольниковъ равны (§ 108); значитъ $OC = O'C'$.

Предложенiе.

§ 163. *Въ кругѣ или въ равныхъ кругахъ:*

1) *хорды уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ центра;*

2) *обратно, изъ двухъ неравныхъ хордъ, большая ближе къ центру.*

1) Пусть $AO = A'O'$; проведемъ изъ центровъ O и O' перпендикуляры OC и $O'C'$ на хорды AB и $A'B'$, и положимъ, что $O'C'$ больше OC; докажемъ, что хорда $A'B'$ меньше хорды AB.

Фиг. 91-я.

Такъ какъ, по условію, $OC < O'C'$, то отложимъ $O'D = OC$ и проведемъ, черезъ точку D, хорду GF перпендикулярно къ $O'C'$; получимъ хорду $GF = AB$, потому что хорды, равно удаленныя отъ центра, равны между собою. Дуга $GN'F$ больше дуги $A'N'B'$; а большей дугѣ соотвѣтствуетъ большая хорда (§ 161); слѣдовательно хорда GF больше хорды $A'B'$, и $AB > A'B'$.

2) Пусть $AO = A'O'$ и хорда $AB > A'B'$; докажемъ, что перпендикуляръ $OC < O'C'$.

Фиг. 92-я.

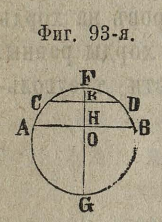
Вслѣдствіе неравенства хордъ AB и $A'B'$, соотвѣтствующія имъ дуги не равны (§ 161), именно дуга AB больше $A'B'$. Отложимъ дугу AD, равную дугѣ $A'B'$; значитъ, хорда AD = хордѣ $A'B'$ (§ 160), и перпендикуляръ $OF = O'C'$, потому что равныя хорды равно удалены отъ центра. Такъ какъ OC перпендикулярна къ AB,

то OG будетъ къ ней наклонною; поэтому $OC < OG$; а какъ $OG < OF$, то подавно $OC < OF$ или $OC < O'C'$, потому что OF и $O'C'$ равны между собою.

Предложеніе.

§ 164. *Дуги окружности, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собою.*

Фиг. 93-я.



1) Пусть хорда AB параллельна хордѣ CD; докажемъ, что дуга AC равна дугѣ BD. Проведемъ изъ центра O перпендикуляръ OF къ хордѣ CD; онъ будетъ перпендикуляренъ и къ AB. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра на хорду, дѣлитъ пополамъ какъ хорду, такъ и соотвѣтствующую ей дугу (§ 146); поэтому

дуг. $AF =$ дуг. BF,

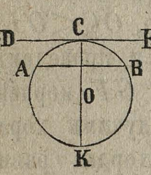
и дуг. $CF =$ дуг. DF;

отсюда дуг. AF — дуг. $CF =$ дуг. BF — дуг. DF,

или дуг. $AC =$ дуг. BD.

2) Пусть хорда AB параллельна касательной DF, которой точка касанія находится въ C; докажемъ, что дуга AC равна дугѣ CB. Соединивъ центръ O съ точкою касанія C, получимъ CO, перпендикулярную къ касательной DF (§ 154); она въ тоже время перпендикулярна и къ AB, потому что AB параллельна DF. И такъ, изъ центра O опущенъ перпендикуляръ OC на хорду AB, а потому онъ дѣлитъ пополамъ и дугу AB, т. е. дуга $AC =$ дугѣ BC.

Фиг. 94-я.



3) Пусть AB параллельна CD, и каждая изъ нихъ касательна къ окружности; докажемъ, что дуга $FMG =$ дугѣ FNG. Соединимъ центръ O съ точкою касанія F; получимъ OF, перпендикулярную къ касательной CD (§ 154); она же будетъ перпендикулярна и къ AB, потому что AB параллельна CD; а какъ перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную, падаетъ въ точку касанія, то продолженіе FO пройдетъ въ точку касанія G. И такъ FOG есть діаметръ; а извѣстно, что діаметръ дѣлитъ окружность пополамъ; слѣдовательно дуга $FMG =$ дугѣ FNG.

Фиг. 95-я.

C F D
N O M
A G B

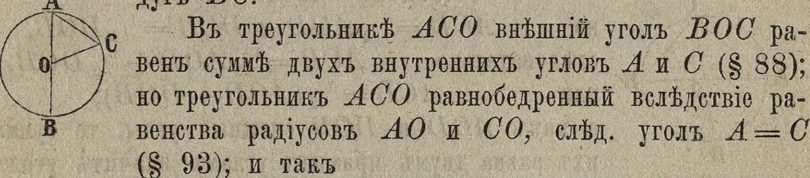
12. Отношеніе угловъ, которыхъ бока встрѣчаютъ окружность или къ ней касаются, къ соотвѣтствующимъ центральнымъ угламъ.

Предложеніе.

§ 165. *Вписанный уголъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ, заключающейся между его боками.*

1) Пусть центръ O лежитъ на бокѣ AB вписаннаго угла A; надобно доказать, что уголъ A составляетъ половину центральнаго угла BOC, соотвѣтствующаго дугѣ BC.

Фиг. 96-я.

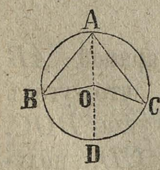


Въ треугольникѣ ACO внѣшній уголъ BOC равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ A и C (§ 88); но треугольникъ ACO равнобедренный вслѣдствіе равенства радіусовъ AO и CO, слѣд. уголъ $A = C$ (§ 93); и такъ

$$\angle BOC = 2A;\ \text{отсюда}\ \angle A = \tfrac{1}{2} BOC.$$

2) Пусть центръ O находится внутри вписаннаго угла BAC; докажемъ, что уголъ $BAC = \frac{1}{2} BOC$.

Фиг. 97-я.



Проведя діаметръ AD, получимъ

$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD;$$

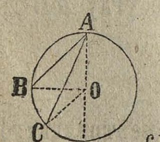
но уголъ BAD, какъ доказано въ предъидущемъ случаѣ, равенъ половинѣ угла BOD; по той же причинѣ уголъ $CAD = \frac{1}{2} DOC$; слѣдовательно $BAC = \frac{1}{2} BOD + \frac{1}{2} DOC$; но $BOD + DOC = BOC$, значитъ уголъ $BAC = \frac{1}{2} BOC$.

3) Пусть центръ O лежитъ внѣ вписаннаго угла BAC; докажемъ, что $\angle BAC = \frac{1}{2} BOC$.

Проведя діаметръ AD, получимъ

Фиг. 98-я.

$$\angle BAC = BAD - CAD.$$



На основаніи перваго случая имѣемъ

$$BAD = \tfrac{1}{2} BOD,$$
$$CAD = \tfrac{1}{2} COD;$$

слѣдовательно $$BAC = \tfrac{1}{2} BOD - \tfrac{1}{2} COD,$$

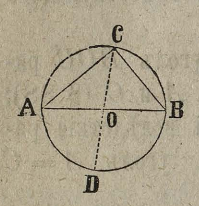
или $$BAC = \tfrac{1}{2} BOC.$$

§ 166. Слѣдствіе I. *Всѣ углы, вписанные въ одномъ и томъ же сегментѣ, равны между собою;* потому что каждый изъ нихъ составляетъ половину одного и того же центральнаго угла, соотвѣтствующаго одной и той же дугѣ.

§ 167. Слѣдствіе II. *Всякій уголъ, вписанный въ полукругѣ, равенъ прямому углу.*

Пусть AB означаетъ діаметръ, уголъ ACB будетъ уголъ вписанный въ полукругѣ; надобно доказать, что онъ равенъ прямому углу. Черезъ вершину C проведемъ діаметръ CD, получимъ

Фиг. 99-я.



$$\angle ACB = ACD + DCB;$$

но $ACD = \frac{1}{2} AOD$ и $DCB = \frac{1}{2} DOB$,

слѣдовательно $\angle ACB = \frac{1}{2} AOD + \frac{1}{2} DOB$,

или $ACB = \frac{1}{2}(AOD + DOB)$;

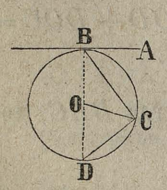
а какъ AOD и DOB смежные углы, то сумма ихъ равна двумъ прямымъ угламъ; значитъ уголъ ACB равенъ прямому углу.

Предложеніе.

§ 168. *Уголъ, составленный хордою и касательною, проведенною черезъ конецъ этой хорды, равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ, заключающейся между его боками.*

Пусть B есть точка касанія прямой AB къ окружности; надобно доказать, что уголъ ABC равенъ половинѣ центральнаго угла BOC. Проведемъ діаметръ BOD и хорду CD; получимъ треугольникъ BCD, въ которомъ уголъ BCD прямой (§ 167); слѣд. остальные два угла, D и DBC, вмѣстѣ, составляютъ прямой уголъ. Но діаметръ BD, проведенный въ точку касанія B, перпендикуляренъ къ касательной AB; значитъ уголъ DBC служитъ также дополненіемъ до прямаго углу ABC; слѣд.

Фиг. 100-я.

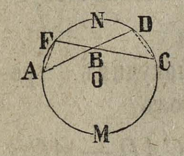


$$\angle ABC = \angle D;$$

а уголъ D, какъ вписанный составляетъ половину центральнаго угла BOC; поэтому и уголъ ABC составляетъ половину угла BOC.

Предложеніе.

§ 169. *Уголъ, котораго вершина внутри круга, равенъ половинѣ суммы центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между боками угла и ихъ продолженіями.*



Фиг. 101-я.

Докажемъ, что уголъ ABC равенъ половинѣ суммы центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и FND.

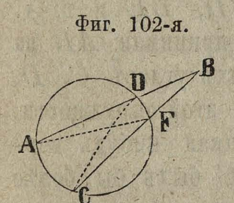
Проведя хорду CD, получимъ треугольникъ BCD и опредѣлимъ внѣшній его уголъ ABC:

$$ABC = D + C;$$

углы D и C, какъ вписанные, равны, каждый, половинѣ центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и FND; слѣдовательно предложеніе доказано.

Предложеніе.

§ 170. *Уголъ, котораго вершина внѣ круга, равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между его боками.*



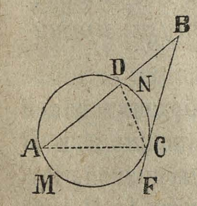
Фиг. 102-я.

1) Докажемъ, что уголъ B, образуемый сѣкущими, равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AC и DF.

Проведя хорду CD, получимъ треугольникъ BCD; внѣшній его уголъ

$$ADC = B + C; \text{ отсюда } B = ADC - C.$$

Но углы ADC и C суть вписанные; слѣдовательно ADC равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ AC; а уголъ C равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ DF; слѣдовательно уголъ B равенъ половинѣ разности упомянутыхъ центральныхъ угловъ.



Фиг. 103-я.

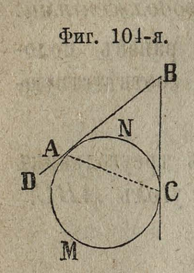
2) Пусть BC — касательная; докажемъ, что уголъ ABC равенъ полуразности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и CND.

Проведя хорду AC, получимъ треугольникъ ABC; опредѣлимъ внѣшній его уголъ ACF; $\angle ACF = A + B$, отсюда $B = ACF - A$.

Уголъ ACF равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ AMC (§ 168);

уголъ A равенъ половинѣ центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ CND; слѣдовательно уголъ B равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и CND.

Фиг. 104-я.



3) Пусть бока AB и BC угла B будутъ касательные; докажемъ, что уголъ B равенъ полуразности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и ANC.

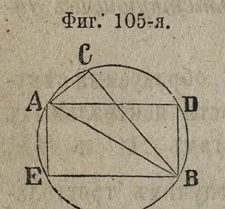
Соединивъ точки касанія, получимъ треугольникъ ABC; внѣшній его уголъ

$CAD = B + ACB$; отсюда $B = CAD - ACB$.

Основываясь на § 168, найдемъ, что углы CAD и ACB, порознь, равны половинамъ центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ AMC и ANC.

§ 171. *Примѣчаніе. I.* Проведемъ прямую AB опредѣленной длины; черезъ одинъ конецъ A этой прямой проведемъ въ произвольномъ направленіи прямыя AC, AD, AE и т. д., а черезъ другой конецъ B перпендикуляры къ нимъ BC, BD, BE и т. д. Если опишемъ окружность, принимая AB за діаметръ, то вершины прямыхъ угловъ C, D, E и т. д. будутъ лежать на этой окружности; и дѣйствительно, если бъ какая нибудь вершина C была внутри окружности, то уголъ C былъ бы болѣе прямаго (§ 169); а если бъ вершина C была внѣ круга, то уголъ C былъ бы меньше прямаго (§ 170); а это противорѣчило бы условію, по которому уголъ C прямой. И такъ вершины C, D, E,... прямоугольныхъ треугольниковъ, которые имѣютъ общую ипотенузу AB, находятся на окружности, построенной на этой ипотенузѣ, принимаемой за діаметръ. Поэтому говорятъ, что *геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольныхъ треугольниковъ, построенныхъ на одной и той же ипотенузѣ, есть окружность, построенная на ипотенузѣ, принимаемой за діаметръ.*

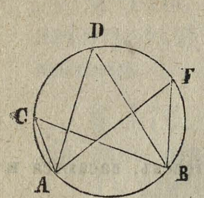
Фиг. 105-я.



Примѣчаніе II. Пусть дана прямая AB; вообразимъ какой нибудь уголъ C, котораго бока проходятъ черезъ концы A и B данной прямой; говорятъ уголъ опирается на концы прямой. Вообразимъ окружность, проходящую черезъ три точки A, B и C;

всѣ углы C, D, E, ... вписанные въ сегментѣ ADB, равны между собою (§ 166); притомъ, всякій уголъ, опирающійся на ту же прямую AB, и имѣющій вершину не на описанной окружности, не равенъ угламъ, C, D, F... (§ 169, 170). По этому *геометрическое мѣсто вершинъ равныхъ угловъ, опирающихся на концы данной прямой, есть сегментъ окружности, проходящей черезъ концы данной прямой.*

Фиг. 106-я.



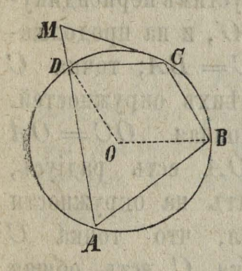
Предложеніе.

* *Во всякомъ четвероугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Пусть $ABCD$ означаетъ четвероугольникъ вписанный въ кругѣ; надо доказать, что $\angle A + \angle C = 2d$, $\angle B + \angle D = 2d$.

Уголъ A, вписанный въ окружности, составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго дугѣ BCD, которая заключается между боками этого угла; по той же причинѣ уголъ C составляетъ половину центральнаго угла соотвѣтствующаго дугѣ BAD. Этѣ двѣ дуги въ суммѣ даютъ полную окружность; значитъ сумма угловъ $A + C$ составляетъ половину центральнаго угла соотвѣтствующаго половинѣ окружности, т. е. она равна $2d$.

Фиг. 107-я.



Предложеніе (обратное).

* *Если въ четвероугольникѣ сумма противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, то такой четвероугольникъ можетъ быть вписанъ въ окружности* (фиг. 107).

Пусть въ четвероугольникѣ $ABCM$, $\angle A + \angle C = 2d$, $\angle B + \angle M = 2d$. Надо доказать, что окружность, проведенная черезъ какія нибудь три вершины A, B и C (§ 138), пройдетъ и черезъ четвертую вершину M. Положимъ противное, т. е. что окружность, описанная черезъ три точки A, B и C, не прошла черезъ точку M; точку D пересѣченія прямой MA съ окружностью соединимъ съ вершиною C; такимъ образомъ получимъ четвероугольникъ $ABCD$ вписанный въ окружности. На основаніи предъидущаго предложенія $\angle ADC + \angle B = 2d$ и

по условію $\angle M + \angle B = 2d$; слѣд. $\angle ADC = \angle M$. Выводъ нелѣпый, потому что $\angle ADC$, какъ внѣшній въ треугольникѣ CDM, больше внутренняго угла M и проч.

---

13. Условія, при которыхъ окружности не имѣютъ общихъ точекъ, касаются и пересѣкаются.

Предложеніе.

§ 172. *Если двѣ окружности имѣютъ общую точку внѣ линіи, соединяющей ихъ центры, то онѣ имѣютъ и другую общую точку.*

Пусть точки O и O' означаютъ центры двухъ окружностей, — слѣд. прямая OO' есть линія центровъ; положимъ, что точка A принадлежитъ обѣимъ окружностямъ. Изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AB на линію OO', и на продолженіи его отложимъ $BC = BA$; точка C будетъ общая для обѣихъ окружностей. Дѣйствительно, наклонная $OC = OA$ (§ 50); но прямая OA есть радіусъ, слѣд. точка C лежитъ на окружности O. Также объяснится, что точка C лежитъ и на окружности O'. И такъ, точка C есть общая точка для обѣихъ окружностей.

Фиг. 108-я.

§ 173. Двѣ окружности не могутъ имѣть больше двухъ общихъ точекъ; потому что двѣ окружности, имѣющія три общія точки, совмѣщаются между собою, составляютъ одну окружность (§ 138).

Двѣ окружности называются *пересѣкающимися*, если онѣ имѣютъ двѣ общія точки.

Предложеніе.

§ 174. *Если двѣ окружности имѣютъ одну только общую точку, то эта точка лежитъ на линіи, проходящей черезъ центры.*

Дѣйствительно, если бъ допустили, что общая точка лежитъ внѣ линіи центровъ, то, на основаніи § 172, заключили бы,

что окружности имѣютъ и другую общую точку, что противно условію предложенія.

§ 175. Окружности называются *касательными*, если онѣ имѣютъ одну только общую точку; точка эта называется *точкою касанія.*

§ 176. Двѣ окружности могутъ имѣть слѣдующія положенія одна относительно другой:

1) или онѣ вовсе не имѣютъ общихъ точекъ, причемъ одна окружность лежитъ внѣ другой или внутри ея;

2) или окружности касаются, причемъ одна можетъ лежать внѣ другой — внѣшнее касаніе, или одна внутри другой — внутреннее касаніе;

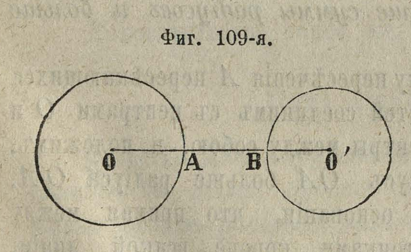
3) или окружности пересѣкаются.

Покажемъ зависимость между радіусами и разстояніемъ между центрами для всякаго изъ вышеупомянутыхъ положеній окружностей.

Предложеніе.

§ 177. *Если двѣ окружности вовсе не имѣютъ общихъ точекъ, то разстояніе между центрами будетъ больше суммы радіусовъ или меньше ихъ разности, смотря по тому, будутъ ли окружности лежать одна внѣ другой или внутри ея.*

Фиг. 109-я.



1) Положимъ, что окружности лежатъ одна внѣ другой; точки O и O' означаютъ ихъ центры, точки A и B пересѣченія линіи центровъ OO' съ окружностями.

Очевидно, что

$$OO' > OA + O'B.$$

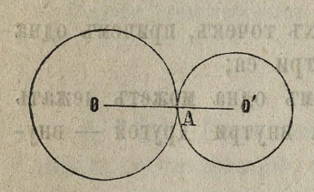
2) Положимъ, что окружности лежатъ одна внутри другой; черезъ центры O и O' проведемъ прямую, которая пересѣчетъ окружность O въ точкѣ A, а другую окружность въ точкѣ B; слѣдов. OA и $O'B$ суть радіусы, а OO' разстояніе между центрами. Очевидно, что $OA - O'B = OO' + BA$; отсюда заключаемъ, что $OO' < OA - O'B$.

Фиг. 110-я.

Предложение.

§ 178. *Если двѣ окружности касаются, то разстояніе между центрами равно суммѣ радіусовъ или ихъ разности, смотря по тому будетъ ли касаніе внѣшнее или внутреннее.*

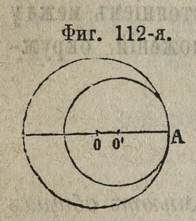
Фиг. 111-я.



1) Пусть окружности O и O' касаются въ точкѣ A и лежатъ одна внѣ другой. Соединимъ центры O и O' прямою OO'; точка касанія A необходимо лежитъ на линіи центровъ (§ 174); слѣд. OA и $O'A$ будутъ радіусы окружностей; очевидно, что

$$OO' = OA + O'A.$$

Фиг. 112-я.



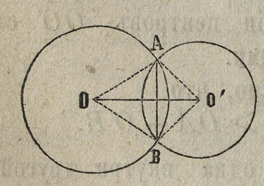
2) Положимъ, что окружности O и O' касаются въ точкѣ A и лежатъ одна внутри другой. Черезъ центры O и O' проведемъ прямую, которая пройдетъ черезъ точку касанія A (§ 174); слѣдов. OA и $O'A$ суть радіусы. Очевидно, что

$$OO' = OA - O'A.$$

Предложеніе.

§ 179. *Если двѣ окружности пересѣкаются, то разстояніе между центрами меньше суммы радіусовъ и больше ихъ разности.*

Фиг. 113-я.



Точку пересѣченія A пересѣкающихся окружностей соединимъ съ центрами O и O', и центры между собою, и положимъ, что радіусъ OA больше радіуса $O'A$. На томъ основаніи, что прямая между двумя точками короче всякой линіи, проведенной между тѣми же точками, получимъ

$$OO' < OA + O'A \; .\;.\;.\;. (1)$$

на томъ же основаніи $OO' + O'A > OA$;

изъ послѣдняго неравенства имѣемъ

$$OO' > OA - O'A \; .\;.\;.\;. (2).$$

Предложеніе (обратное).

§ 180. *Одна окружность лежитъ внѣ другой или внутри ея всѣми своими точками, смотря по тому, будетъ ли разстояніе между центрами больше суммы радіусовъ или меньше ихъ разности.*

Назовемъ буквами D, R, R' послѣдовательно разстояніе между центрами и радіусы окружностей, причемъ предположимъ, что R больше R'.

1) Положимъ, что $D > R + R'$; надо доказать, что окружности лежатъ одна внѣ другой, не имѣя вовсе общихъ точекъ. Дѣйствительно, если бъ допустили, что окружности касаются извнѣ или внутри, то на основаніи § 178, имѣли бы $D = R + R'$ или $D = R - R'$; а это противно условію, по которому $D > R + R'$. Если бъ допустили, что окружности пересѣкаются, то имѣли бы $D < R + R'$ и $D > R - R'$ (§ 179), что также противно условію. Наконецъ, если бъ предположили, что окружности лежатъ одна внутри другой всѣми своими точками, то получили бы $D < R - R'$ (§ 177, 2-е), и это противно условію. И такъ, при условіи $D > R + R'$ окружности не могутъ ни касаться, ни пересѣкаться, ни лежать одна внутри другой; слѣд. онѣ лежатъ одна внѣ другой, потому что, кромѣ разсмотренныхъ случаевъ, нѣтъ другихъ положеній окружностей.

2) Если $D < R - R'$, то окружности лежатъ одна внутри другой, вовсе не имѣя общихъ точекъ.

Доказательство такое же, какое сейчасъ было употреблено.

Предложеніе (обратное).

§ 181. *Двѣ окружности касаются извнѣ или внутри, смотря по тому, будетъ ли разстояніе между центрами равно суммѣ радіусовъ или ихъ разности.*

Доказательство, какъ въ § 180.

Предложеніе (обратное).

§ 182. *Двѣ окружности пересѣкаются, если разстояніе между центрами меньше суммы радіусовъ, а больше ихъ разности.*

Доказательство, какъ въ § 180.

§ 183. Для наглядности сдѣлаемъ сводъ предложенiй предъидущихъ параграфовъ, выражающихъ условiя, при которыхъ окружности имѣютъ извѣстныя положенiя одна относительно другой. Буквами D, R и R' означимъ послѣдовательно разстоянiе между центрами и радiусы, полагая $R>R'$.

Условiя:	*Положенiе окружностей:*
1) $D>R+R'$,	одна внѣ другой.
2) $D<R-R'$,	одна внутри другой.
3) $D=R+R'$,	касаются извнѣ.
4) $D=R-R'$,	касаются внутри.
5) $D<R+R'$ и $D>R-R'$	пересѣкаются.

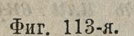
Примѣръ. Даны: разстоянiе между центрами 1 дюймъ и радiусы 1,25 д., 0,75 д.; опредѣлить положенiе окружностей, не прибѣгая къ черченiю.

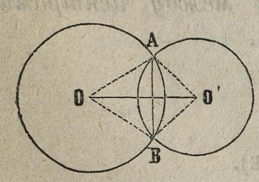
Такъ какъ $D=1$, $R=1{,}25$, $R'=0{,}75$, то $R+R'=2$, $R-R'=0{,}5$; поэтому $D<R+R'$ и $D>R-R'$. И такъ данныя условiя подходятъ къ 5-му случаю, значитъ окружности пересѣкаются.

Предложенiе.

§ 184. *Прямая, соединяющая центры двухъ пересѣкающихся окружностей, перпендикулярна къ общей ихъ хордѣ и дѣлитъ ее пополамъ.*

Въ двухъ пересѣкающихся окружностяхъ O и O' проведемъ общую имъ хорду AB и соединимъ между собою центры O и O'; докажемъ, что OO' перпендикулярна къ AB и дѣлитъ ее пополамъ. По равенству радiусовъ OA и OB, а также радiусовъ $O'A$ и $O'B$ въ другой окружности, заключаемъ, что прямая OO' соединяетъ двѣ точки O и O', изъ которыхъ каждая равно отстоитъ отъ концовъ A и B прямой AB; поэтому прямая OO' перпендикулярна къ AB и проходитъ черезъ ея середину (§ 57).


Фиг. 113-я.



Въ видахъ упражненiй предлагается, на основанiи § 174, найти: 1) геометрическое мѣсто центровъ окружностей одного и

того же радіуса и касающихся данной окружности; 2) геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся къ данной окружности въ данной точкѣ.

ВОПРОСЫ.

14. Линейка, циркуль, чертежный треугольникъ. — Повѣрка ихъ. — Возставить перпендикуляръ къ прямой: въ ея серединѣ, въ какой ни есть точкѣ и въ одномъ изъ концовъ. — На прямую опустить перпендикуляръ изъ данной точки. — Черезъ данную точку провесть параллельную данной прямой.

§ 185. Излагая геометрическія истины, предложенія или теоремы, мы безпрестанно указывали на проведеніе прямыхъ линій, окружностей, перпендикулярныхъ и параллельныхъ линій, на дѣленіе прямыхъ линій, дугъ и угловъ на равныя части и т. п.; для насъ достаточна была увѣренность въ возможности указанныхъ построеній. Напримѣръ, убѣдившись, что изъ всякой точки, взятой на прямой или внѣ ея, можно провести къ ней перпендикуляръ (§§ 30, 46), мы пользовались этимъ свойствомъ, хотя и не знали, какъ на самомъ дѣлѣ начертить на бумагѣ этотъ перпендикуляръ.

Теперь покажемъ, какъ на самомъ дѣлѣ начертить на бумагѣ прямыя линіи и окружности, при извѣстныхъ условіяхъ, для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ.

Для проведенія прямой линіи на бумагѣ употребляется линейка, по краю которой проводятъ остро очиненнымъ карандашемъ линію; линія эта будетъ изображать прямую, если линейка вѣрна.

Чтобы *повѣрить* линейку, проводятъ линію по ея краю; потомъ приставляютъ тѣмъ же краемъ линейку къ этой линіи, но съ другой стороны, и вновь проводятъ линію: если эти двѣ линіи совпадаютъ всѣми точками, то линейка вѣрна (§ 10).

Для проведенія на бумагѣ *окружности*, а также для откладыванія прямыхъ, которыхъ длина была бы равна данной длинѣ, служитъ *циркуль*. Для откладыванія линіи употребляется циркуль, оканчивающійся металлическими острыми ножками. Въ *вѣрномъ* циркулѣ, плотно сдвинутыя ножки, должны оканчиваться одною точкою.

Для черченія окружностей, вмѣсто одной ножки циркуля, вставляютъ металлическую трубочку, въ которую вложенъ каран-

дашъ; этотъ послѣднiй очертитъ окружность, причемъ острая ножка циркуля оставляется неподвижно въ точкѣ, принимаемой за центръ.

Хотя всѣ вопросы начальной геометрiи и можно рѣшать помощiю линейки и циркуля, но въ тѣхъ вопросахъ, въ которыхъ требуется проводить перпендикулярныя и параллельныя линiи, съ большимъ удобствомъ употребляется *чертежный треугольникъ*,—это прямоугольный треугольникъ, сдѣланный изъ дерева, котораго катеты не равны между собою. Чертежный треугольникъ вѣренъ, если края трехъ его боковъ срѣзаны по направленiю прямыхъ линiй, а одинъ изъ угловъ прямой.

Вѣрность боковъ чертежнаго треугольника узнается тѣмъ же способомъ, какимъ повѣряется линейка.

Чтобы *повѣрить уголъ* чертежнаго треугольника, т. е. узнать дѣйствительно ли онъ прямой, прикладываютъ большiй катетъ чертежнаго треугольника къ обыкновенной линейкѣ, притомъ такъ, чтобы катетъ плотно прилегалъ къ краю линейки, и проводятъ прямую линiю по краю другого, меньшаго катета. Не сдвигая линейки, перекладываютъ чертежный треугольникъ на другую сторону, верхнею поверхностью внизъ, но такъ, чтобы опять край большаго катета плотно прилегалъ къ краю линейки, которая, какъ замѣчено выше, не измѣнила прежняго положенiя; наконецъ, подвигаютъ чертежный треугольникъ до тѣхъ поръ, пока край меньшаго катета не дойдетъ до начерченной прямой линiи: если этотъ край совпадетъ съ упомянутой сейчасъ прямою линiею, то уголъ, составленный двумя катетами будетъ прямой; потому что на прямой, изображенной краемъ линейки, получатся равные смежные углы.

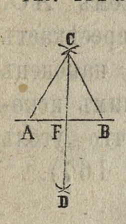
Приступая къ рѣшенiю геометрическихъ вопросовъ, замѣтимъ, что въ каждомъ вопросѣ показано теоретическое его рѣшенiе, гдѣ всѣ линiи проводятся отъ руки, безъ циркуля и линейки. Усвоивъ такое рѣшенiе, ученикъ долженъ исполнить указанный чертежъ помощiю линейки и циркуля, а въ случаѣ надобности и чертежнаго треугольника; такимъ образомъ теорiя будетъ примѣнена къ *геометрическому черченiю*.

Вопросъ.

§ 186. *Возставить перпендикуляръ къ прямой въ ея серединѣ.*

Пусть AB означаетъ данную прямую. Изъ конца ея A, какъ центра, радіусомъ, равнымъ данной прямой AB, опишемъ окружность; изъ другого конца B, какъ центра, тѣмъ же радіусомъ BA, опишемъ другую окружность: онѣ пересѣкутся, потому что разстояніе между центрами AB меньше суммы радіусовъ $AB + AB$, и это же разстояніе больше ихъ разности $AB—AB$, равной нулю. Пусть C и D означаютъ двѣ точки пересѣченія окружностей; прямая CD, проведенная черезъ эти точки, какъ общая хорда двухъ пересѣкающихся окружностей, будетъ перпендикулярна къ AB (§ 184).

Фиг. 114-я.



Остается доказать, что $AF=BF$. Проведя BC и AC, получимъ два прямоугольные треугольника BCF и ACF, въ которыхъ ипотенуза $BC = AC$, какъ равные радіусы, катетъ CF — общій; слѣдовательно $AF = BF$ (§ 108).

Примѣчаніе. Для рѣшенія вопроса можно за радіусы принять произвольныя линіи, лишь бы только онѣ были больше половины данной прямой AB и равны между собою.

Предъидущее построеніе рѣшаетъ вопросъ *о раздѣленіи прямой линіи на двѣ равныя части.*

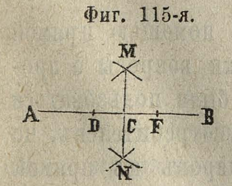
Вопросъ.

§ 187. *Возставить перпендикуляръ къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ.*

Пусть требуется провесть перпендикуляръ къ AB, черезъ какую нибудь ея точку C.

Отложимъ произвольныя, равныя части $CD = CF$. Къ прямой DF примѣнимъ рѣшеніе предъидущаго вопроса, т. е. изъ D, а потомъ изъ F, какъ центровъ, опишемъ окружности радіусами, равными прямой DF, и точки пересѣченія M и N соединимъ прямою MN; она раздѣлитъ DF пополамъ, слѣдовательно пройдетъ черезъ C и будетъ перпендикулярна къ AB (§ 186).

Фиг. 115-я.

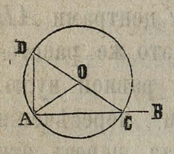


Вопросъ.

§ 188. *Возставить къ прямой перпендикуляръ, проходящій черезъ ея конецъ.*

Требуется провесть перпендикуляръ къ AB, проходящій черезъ конецъ A, не продолжая прямой.

Фиг. 116-я.



Изъ произвольной точки O, лежащей въ прямомъ углу, опишемъ окружность радіусомъ AO, а черезъ точку C, гдѣ окружность пересѣкаетъ прямую AB, проведемъ діаметръ COD; наконецъ соединимъ точку D съ A, тогда получимъ искомый перпендикуляръ AD, — потому что уголъ DAC вписанъ въ полуокружности (§ 167).

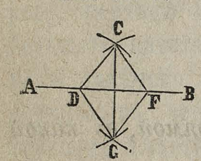
Вопросъ.

§ 189. *На прямую опустить перпендикуляръ изъ данной точки.*

Пусть требуется опустить перпендикуляръ изъ точки C на прямую AB.

На прямой AB возьмемъ произвольныя двѣ точки D и F, на глазъ, одну съ одной стороны искомаго перпендикуляра, а другую съ другой стороны. Изъ точки D, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ DC, и изъ точки F, какъ центра, опишемъ окружность радіусомъ FC; обѣ окружности пересѣкутся, ибо, вслѣдствіе построенія, онѣ имѣютъ общую точку C внѣ линіи DF, соединяющей центры D и F (§ 172).

Фиг. 117-я.



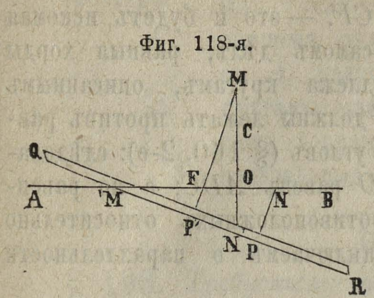
Соединивъ прямою точки пересѣченія C и G, получимъ искомый перпендикуляръ CG, потому что въ пересѣкающихся кругахъ линія центровъ DF перпендикулярна къ общей хордѣ CG (§ 184).

§ 190. Предъидущіе вопросы мы рѣшили помощью прямой линіи и окружности; значитъ, рѣшая практически вопросы о проведеніи перпендикулярныхъ линій, мы должны были пользоваться линейкою и циркулемъ. Въ практикѣ весьма употребителенъ, по своей простотѣ, способъ проведенія перпендикуляровъ къ прямой линіи черезъ какую ни есть точку помощію линейки и чертежнаго треугольника.

Положимъ, что требуется черезъ точку C провесть перпендикуляръ къ прямой AB. Приставимъ чертежный треугольникъ MNP ипотенузою MN къ прямой AB, а линейку QR — къ

катету MP; потомъ, не сдвигая линейки, переставимъ треугольникъ другимъ катетомъ NP на линейку и будемъ подвигать треугольникъ, пока ипотенуза $M'N'$ не пройдетъ черезъ точку C; тогда линія, проведенная по краю $M'N'$ треугольника, будетъ перпендикулярна къ AB. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ MFP' и $FM'O$, $\angle M = \angle M'$, какъ тотъ же уголъ чертежнаго треугольника; $\angle MFP' = \angle M'FO$, какъ противоположные; слѣд. и третьи углы равны: $\angle MP'F = \angle M'OF$; но первый изъ этихъ угловъ прямой, какъ уголъ чертежнаго треугольника; слѣд. и уголъ $M'OF$ — прямой, а прямая $M'CN'$ перпендикулярна къ AB.

Фиг. 118-я.



Изложеннымъ способомъ рѣшаютъ съ одинаковою простотою вопросы о проведеніи перпендикуляровъ черезъ точку, данную на прямой, черезъ точку, данную въ концѣ прямой и черезъ точку, данную внѣ прямой.

Примѣчаніе. Если бъ одинъ катетъ чертежнаго треугольника былъ приставленъ къ данной прямой такъ, чтобы другой катетъ проходилъ черезъ данную точку, то прямая, проведенная по этому другому катету представила бы искомый перпендикуляръ. Не смотря на простоту этого способа сравнительно съ изложеннымъ выше, онъ никогда не употребляется: точка пересѣченія не будетъ означена ясно, перпендикуляръ будетъ только по одну сторону прямой; наконецъ, трудно приложить катетъ треугольника къ данной линіи со всею точностью.

Вопросъ.

§ 191. *Черезъ данную точку провесть параллельную данной прямой.*

1. Рѣшеніе помощію линейки и циркуля.

Пусть требуется провесть черезъ точку C прямую, параллельную AB. Точку C соединимъ съ какою нибудь точкою D, взятою на прямой AB; принявъ точку D за центръ, радіусомъ DC, опишемъ дугу CA; потомъ изъ точки C, тѣмъ же радіу-

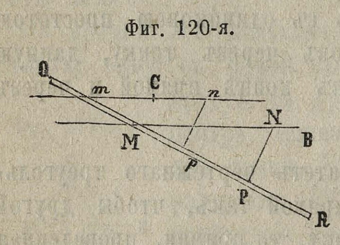
сомъ DC, опишемъ дугу DF; наконецъ изъ точки D радiусомъ, равнымъ хордѣ AC, опишемъ дугу и точку пересѣченія F соединимъ съ C прямою CF, — это и будетъ искомая параллельная. Въ самомъ дѣлѣ, равныя хорды AC и DF, принадлежа кругамъ, описаннымъ равными радiусами, должны лежать противъ равныхъ центральныхъ угловъ (§ 160, 2-е): слѣдовательно, уголъ FCD равенъ ADC; а по равенству этихъ угловъ, внутреннихъ противоположныхъ относительно AB и CF при сѣкущей CD, заключаемъ о параллельности прямыхъ CF и AB.

Фиг. 119-я.

2. Рѣшеніе помощію линейки и чертежнаго треугольника.

Пусть требуется черезъ точку C провести прямую параллельно къ линіи MB. Къ линіи MB приставимъ ипотенузу чертежнаго треугольника MNP, а къ большему изъ катетовъ этого треугольника приложимъ линейку QR; потомъ, не сдвигая линейки, подвинемъ треугольникъ по линейкѣ до тѣхъ поръ, пока его ипотенуза не пройдетъ черезъ точку C; тогда линія, проведенная по ребру mn треугольника mnp, рѣшитъ вопросъ; потому что при линіяхъ MN и mn, и сѣкущей QR, соотвѣтственные углы NMP и nmp равны между собою; ибо они представляютъ одинъ и тотъ же уголъ чертежнаго треугольника.

Фиг. 120-я.



---

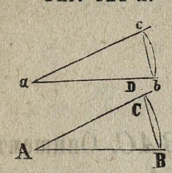
15. Построить уголъ, равный данному.—Сложить произвольное число угловъ.—Изъ угла вычесть другой уголъ.—Уголъ раздѣлить пополамъ и вообще на степень числа 2.—Тѣ же задачи относительно дугъ.

Вопросъ.

§ 192. *На прямой, при данной на ней точкѣ, построить уголъ, равный данному углу.*

Пусть на прямой AB, при точкѣ A, требуется построить уголъ, равный углу a. Изъ вершины a, какъ центра, опишемъ

дугу bc произвольнымъ радіусомъ; а потомъ изъ точки A, какъ центра, тѣмъ же радіусомъ, опишемъ дугу BD.



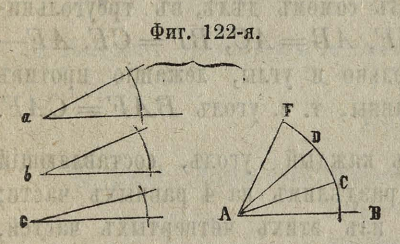
Фиг. 121-я.

Изъ точки B радіусомъ, равнымъ хордѣ bc, опишемъ дугу, и точку пересѣченія C соединимъ съ A, получимъ уголъ $A = a$; потому что въ кругахъ, описанныхъ равными радіусами, равнымъ хордамъ, BC и bc, соотвѣтствуютъ равные центральные углы.

Вопросъ.

§ 193. *Требуется сложить нѣсколько угловъ a, b, c.*

Проведемъ какую нибудь прямую AB и при точкѣ A, взятой на ней, нанесемъ уголъ BAC, равный a; на прямой AC, при точкѣ A, нанесемъ уголъ CAD, равный b; наконецъ на бокѣ AD, при точкѣ A, нанесемъ уголъ DAF, равный c. Очевидно, что уголъ



Фиг. 122-я.

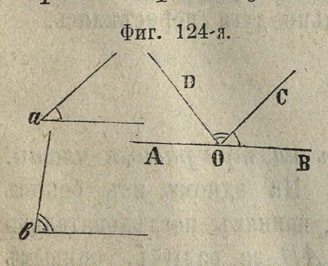
$$BAF = a + b + c.$$

§ 194. *Чтобы изъ угла ABC вычесть уголъ b,* построимъ внутри его на одномъ изъ боковъ, напримѣръ на AB, при точкѣ B, уголъ ABD, равный данному углу b; уголъ CBD составитъ искомую разность.

Фиг. 123-я.

Вопросъ.

§ 195. *По извѣстнымъ двумъ угламъ треугольника, построить третій уголъ.*



Фиг. 124-я.

Пусть a и b данные углы. Проведемъ прямую AB и означимъ на ней какую нибудь точку O. При этой точкѣ нанесемъ уголъ $BOC = a$, потомъ уголъ $COD = b$; уголъ AOD будетъ искомый, потому что онъ служитъ дополненіемъ до 2-хъ прямыхъ суммѣ угловъ $a + b$, и искомый уголъ

треугольника имѣетъ тоже дополненіе $a+b$, ибо сумма угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ.

Вопросъ.

§ 196. *Уголъ раздѣлить пополамъ.*

Пусть требуется раздѣлить пополамъ уголъ BAC. Опишемъ дугу BC, между боками угла, принявъ вершину A за центръ, а за радіусъ произвольную длину. Изъ точекъ B и C, какъ центровъ, радіусами, равными хордѣ BC, опишемъ дуги, и пересѣченіе ихъ F соединимъ съ вершиною A: тогда получимъ уголъ $BAF = FAC$. Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ ABF и ACF, $AB = AC$, $BF = CF$, AF— общая; слѣдовательно и углы, лежащіе противъ равныхъ сторонъ, BF и CF, равны, т. е. уголъ $BAF = CAF$.

Фиг. 125-я.

§ 197. Раздѣливъ пополамъ каждый уголъ, составляющій половину угла BAC, весь уголъ раздѣлимъ на 4 равныхъ части; а раздѣливъ пополамъ каждую изъ этихъ четвертыхъ частей, раздѣлимъ весь уголъ BAC на 8 равныхъ частей. Продолжая такимъ образомъ, раздѣлимъ уголъ на 16, 32 и т. д. равныхъ частей, и вообще на всякую степень числа 2.

§ 198. Чтобы дугу BC (фиг. 125) раздѣлить пополамъ, соединимъ концы ея B и C съ центромъ A; такимъ образомъ получимъ уголъ BAC, который умѣемъ раздѣлить пополамъ; пусть уголъ $BAF = CAF$; а какъ равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги, то дуга BC раздѣлится пополамъ.

Этимъ способомъ дугу можно раздѣлить на 4, 8, 16, и т. д. равныхъ частей, и вообще на всякую степень числа 2.

Примѣчаніе. Дуги можно описывать радіусомъ, различнымъ отъ хорды BC (§ 196), лишь бы только дуги пересѣклись.

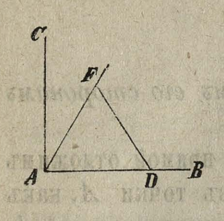
Вопросъ.

§ 199. *Прямой уголъ раздѣлить на три равныя части.*

Пусть данъ прямой уголъ BAC. На одномъ изъ боковъ AB назначимъ произвольную точку D; принявъ послѣдовательно точки A и D за центры, а прямую AD за радіусъ, опишемъ

окружности; точку F пересѣченія ихъ соединимъ съ точками A и D, получимъ равносторонній треугольникъ ADF; поэтому $\angle DAF = \frac{2}{3}\,d$; слѣд. $\angle CAF = \frac{1}{3}\,d$.

Фиг. 126-я.



Примѣчаніе. Здѣсь естественно раждается вопросъ о раздѣленіи всякаго угла на три равныя части. Вопросъ этотъ не можетъ быть рѣшенъ помощію начальной геометріи, т. е. при помощи циркуля и линейки. Предостерегаемъ учащихся не тратить напрасно труда на рѣшеніе этого вопроса.

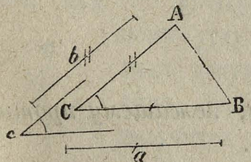
---

16. Построить треугольникъ по даннымъ частямъ, достаточнымъ для его опредѣленія.

Вопросъ.

§ 200. *Даны двѣ стороны a и b треугольника и уголъ c, ими составленный; построить треугольникъ.*

Фиг. 127-я.



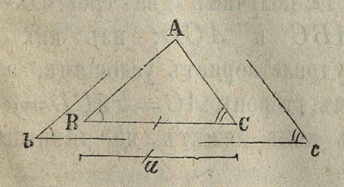
При точкѣ C на неопредѣленной прямой CB построимъ уголъ C, равный c, и по бокамъ его отложимъ $CB = a$, $CA = b$; соединивъ точки A и B, получимъ искомый треугольникъ ABC (§ 98).

Вопросъ.

§ 201. *Дана сторона и два угла треугольника, построить треугольникъ.*

1) Пусть даны углы b и c, прилежащіе данному боку a. Отложивъ на неопредѣленной прямой часть BC, равную a, и построивъ углы B и C, соотвѣтственно равные угламъ b и c, получимъ искомый треугольникъ ABC (§ 100).

Фиг. 128-я.



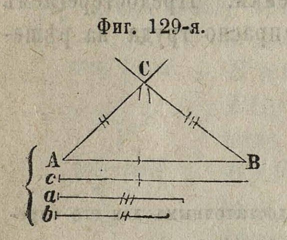
2) Если одинъ изъ угловъ b и c долженъ лежать *противъ* стороны a, то, опредѣливъ третій уголъ треугольника (§ 195), приведемъ вопросъ къ предъидущему случаю.

Примѣчаніе. Треугольникъ тогда только возможно построить, когда сумма двухъ данныхъ угловъ b и c меньше двухъ прямыхъ.

Вопросъ.

§ 202. *Построить треугольникъ по тремъ его сторонамъ* a, b и c.

Фиг. 129-я.



На неопредѣленной прямой отложимъ AB, равную линіи c; изъ точки A, какъ центра, радіусомъ, равнымъ сторонѣ b, опишемъ дугу; изъ точки B, какъ центра, радіусомъ, равнымъ сторонѣ a, опишемъ дугу до пересѣченія съ первою дугою, и точку пересѣченія C соединимъ съ точками B и A: получимъ искомый треугольникъ ABC.

Примѣчаніе. Треугольникъ тогда только возможно построить, когда дуги пересѣкутся; поэтому разстояніе ихъ центровъ или бокъ c долженъ быть меньше суммы двухъ другихъ боковъ a и b и больше ихъ разности.

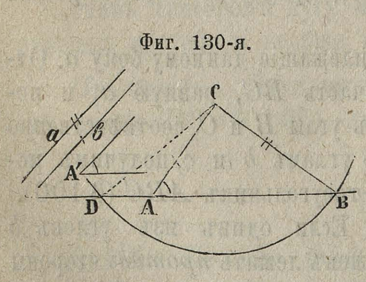
Вопросъ.

§ 203. *По двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ, построить треугольникъ.*

1) Пусть даны стороны a и b, гдѣ $a > b$, и уголъ A', который долженъ лежать противъ *большей* стороны a.

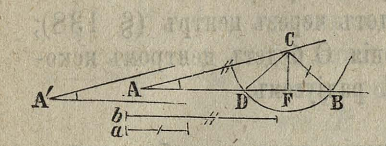
Построимъ уголъ BAC, равный A', и отложимъ $AC = b$. Принявъ точку C за центръ, радіусомъ, равнымъ a, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ прямую AB въ двухъ точкахъ B и D, лежащихъ по разнымъ сторонамъ точки A; потому что вслѣдствіе условія, AC меньше BC. Проведя прямыя CB и CD, получимъ два треугольника ABC и ACD; изъ нихъ первый удовлетворяетъ условіямъ, а во второмъ, стороны $AC = b$ и $CD = a$ суть данныя, но противъ большей изъ нихъ лежитъ не данный уголъ A', а его дополненіе CAD.

Фиг. 130-я.



2) Пусть $a < b$, а данный уголъ A' долженъ лежать противъ *меньшей* стороны a. Повторивъ построеніе, изложенное въ 1-мъ случаѣ, найдемъ, что дуга, описанная изъ центра C радіусомъ a, пересѣчетъ прямую AB въ двухъ точкахъ B и D, по одну сторону точки A, потому что, вслѣдствіе условія, AC больше радіуса a, и слѣд. точки пересѣченій должны быть ближе къ основанію перпендикуляра, нежели точка A, и получимъ два треугольника ACD и ABC, удовлетворяющіе условіямъ вопроса.

Фиг. 131-я.



Примѣчаніе. Вопросъ будетъ возможенъ, если дуга, описанная изъ центра C, радіусомъ a, пересѣчетъ прямую AB; а для этого необходимо, чтобы a было больше разстоянія CF, точки C до прямой AB. Такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ вопросъ всегда возможенъ, потому что радіусъ a, будучи больше наклонной CA (фиг. 130), необходимо больше перпендикуляра, опущеннаго изъ C на AB.

Фиг. 132-я.

3) Пусть $a = b$. Построимъ уголъ A, равный данному углу A', отложимъ $AC = b$, а изъ точки C, какъ центра, опишемъ дугу радіусомъ a: она необходимо пройдетъ черезъ точку A, такимъ образомъ получится треугольникъ ABC.

Примѣчаніе. Въ этомъ случаѣ вопросъ тогда только возможенъ, когда данный уголъ A острый; потому что, при условіи $a = b$, два противолежащіе угла A и B равны между собою; а въ треугольникѣ не можетъ быть двухъ тупыхъ, а также двухъ прямыхъ угловъ.

---

17. Провести окружность черезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой.—Данной окружности или данной дуги найти центръ.—Провести касательную къ окружности черезъ точку кривой, черезъ точку внѣшнюю и параллельно данной прямой.—Въ треугольникѣ вписать окружность.—На данномъ основаніи построить круговой сегментъ, вмѣщающій данный уголъ.

Вопросъ.

§ 204. *Провести окружность черезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой.*

Пусть A, B и C означаютъ три данныя точки. Проведемъ двѣ прямыя AB и BC, — онѣ будутъ хордами искомой окружности; изъ серединъ этихъ прямыхъ возставимъ къ нимъ перпендикуляры DO и FO, — каждый изъ нихъ пройдетъ черезъ центръ (§ 138); поэтому точка пересѣченія O будетъ центромъ искомой окружности, а OA радіусомъ.

Фиг. 77-я.

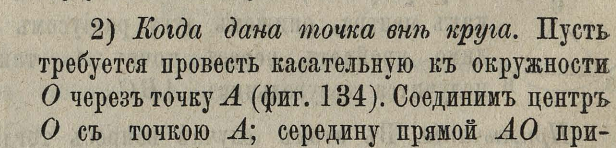
§ 205. Изъ предъидущаго рѣшенія видно: *чтобы найти центръ окружности или дуги*, надобно провесть двѣ пересѣкающіяся хорды, и изъ серединъ ихъ возставить перпендикуляры; точка пересѣченія этихъ перпендикуляровъ будетъ искомый центръ.

Вопросъ.

§ 206. *Провести касательную къ окружности.*

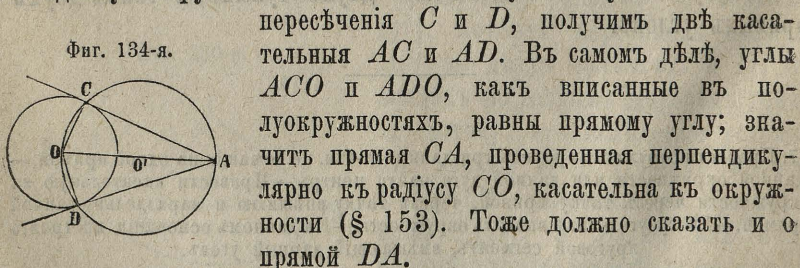
1) *Когда дана точка на окружности.* Пусть A данная точка; соединимъ ее съ центромъ O и возставимъ перпендикуляръ BC изъ точки A къ радіусу AO; BC будетъ касательная.

Фиг. 133-я.



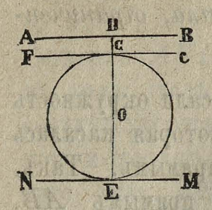
2) *Когда дана точка внѣ круга.* Пусть требуется провесть касательную къ окружности O черезъ точку A (фиг. 134). Соединимъ центръ O съ точкою A; середину прямой AO примемъ за центръ, а половину ея за радіусъ: окружность, такимъ образомъ описанная, пройдетъ черезъ точки A и O, и пересѣчетъ данную окружность. Соединимъ данную точку A съ точками пересѣченія C и D, получимъ двѣ касательныя AC и AD. Въ самомъ дѣлѣ, углы ACO и ADO, какъ вписанные въ полуокружностяхъ, равны прямому углу; значитъ прямая CA, проведенная перпендикулярно къ радіусу CO, касательна къ окружности (§ 153). Тоже должно сказать и о прямой DA.

Фиг. 134-я.



3) *Когда касательная должна быть параллельна данной прямой.* Пусть AB данная прямая; изъ центра O опустимъ перпендикуляръ OD на прямую AB, а изъ точки пересѣченія

Фиг. 135-я.



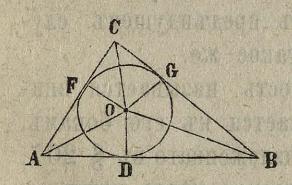
G возставимъ перпендикуляръ FC къ прямой DO: этотъ перпендикуляръ будетъ касательною къ окружности, и онъ параллеленъ AB, потому что двѣ прямыя AB и FC перпендикулярны къ третьей DO. Другое рѣшеніе доставитъ прямая MN, проведенная перпендикулярно къ діаметру GE черезъ конецъ его E.

Вопросъ.

§ 207. *Въ треугольникѣ вписать окружность.*

Припомнимъ (§ 157), что вписать кругъ въ треугольникѣ значитъ найти такой кругъ, къ окружности котораго касались бы бока треугольника. Пусть данъ треугольникъ ABC. Раздѣлимъ пополамъ два угла треугольника, напримѣръ углы A и B; изъ точки пересѣченія O опустимъ перпендикуляры OD, OF и OG на стороны треугольника, и докажемъ, что $OD = OF = OG$. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADO и AFO, при общей ипотенузѣ AO, острые углы равны между собою, $DAO = FAO$; слѣдовательно остальныя части равны, $OD = OF$, $AD = AF$. Точно также изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ BDO и BGO, найдемъ, что $OD = OG$; значитъ $OD = OF = OG$. Поэтому, принявъ O за центръ, а OD за радіусъ, получимъ окружность, которая пройдетъ черезъ точки D, F и G, а стороны AB, BC и AC, будутъ къ ней касательны въ точкахъ D, G и F (§ 153).

Фиг. 136-я.



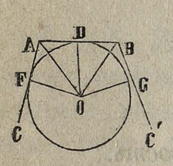
§ 208. Для рѣшенія вопроса, мы раздѣлили пополамъ углы A и B; легко объяснить, что *прямая, дѣлящая пополамъ третій уголъ C, пройдетъ черезъ точку O пересѣченія двухъ первыхъ равно-дѣлящихъ.* Въ самомъ дѣлѣ, проведя прямую CO (фиг. 136), найдемъ, что въ прямоугольныхъ треугольникахъ CFO и CGO, при общей ипотенузѣ CO, катеты GO и FO равны; слѣдовательно и остальныя части равны, т. е.

$$\angle FCO = \angle GCO.$$

§ 209. Мы замѣтили (§ 207), что $AD = AF$: поэтому, *если окружность вписана въ уголъ, то бока угла, ограниченные точками касанія, равны между собою.*

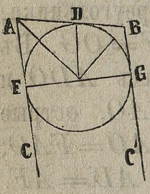
Примѣчаніе I. Подобно тому, какъ мы вписали окружность въ треугольникѣ, можно провесть окружность, которая касалась бы къ какимъ нибудь тремъ прямымъ. Такъ, чтобы окружность касалась къ прямымъ AB, AC и BC'; раздѣлимъ углы A и B пополамъ, а изъ точки пересѣченія ихъ O опустимъ перпендикуляры OF, OD и OG на данныя прямыя. Изъ равенства треугольниковъ AOF и AOD, BDO и BGO, получимъ $OF = OD = OG$; слѣдовательно окружность, описанная изъ центра O радіусомъ OF, удовлетворитъ условіямъ вопроса.

Фиг. 137-я.



Если прямыя AC и BC' параллельны между собою, и требуется описать окружность, для которой прямыя AC, BC' и AB были бы касательными, то надобно поступать такъ точно, какъ мы поступили въ предъидущемъ случаѣ; доказательство будетъ такое же.

Фиг. 138-я.



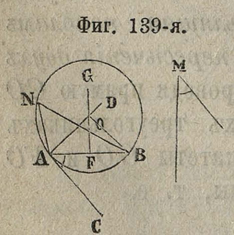
Примѣчаніе II. Окружность называется вписанною въ углѣ, если она касается къ его бокамъ. На основаніи доказательства, изложеннаго въ § 207, предлагается найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, вписанныхъ въ данномъ углѣ.

Вопросъ.

§ 210. *На данной прямой построить круговой сегментъ, вмѣщающій данный уголъ.*

Пусть AB означаетъ данную прямую, которая должна быть хордою круга, — причемъ одинъ изъ сегментовъ, отдѣляемыхъ этою хордою, долженъ содержать вписанные углы, равные напередъ данному углу M. При точкѣ A построимъ уголъ BAC, равный углу M; изъ точки A возставимъ перпендикуляръ AD къ боку AC; изъ середины F хорды AB возставимъ къ ней перпендикуляръ FG; пересѣченіе O (§ 79) этихъ перпендикуляровъ примемъ за центръ и радіусомъ OA опишемъ

Фиг. 139-я.



окружность: она пройдетъ черезъ точку B; потому что $AO = BO$ (§ 55), и AC будетъ къ ней касательною въ точкѣ A (§ 153). Сегментъ ANB есть искомый; въ самомъ дѣлѣ, всякій вписанный въ немъ уголъ ANB равенъ половинѣ центральнаго угла AOB, соотвѣтствующаго дугѣ AB; уголъ BAC, образуемый касательною и хордою, составляетъ также половину того же центральнаго угла; слѣдовательно уголъ $ANB =$ углу CAB, а уголъ $CAB = M$; значитъ уголъ $ANB = M$.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Пропорціональность линій и подобіе многоугольниковъ.

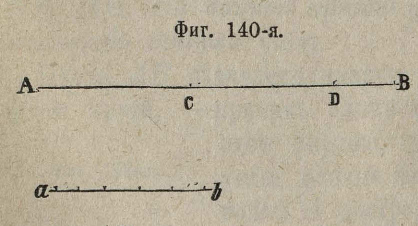
18. Понятія объ отношеніи и измѣреніи величинъ.—Измѣреніе прямой линіи.— Величины соизмѣримыя и несоизмѣримыя. — Отношеніе центральныхъ угловъ равно отношенію соотвѣтственныхъ дугъ, описанныхъ равными радіусами.—Измѣреніе центральныхъ угловъ.— Транспортиръ.— Измѣреніе угловъ, составленныхъ хордами, касательными и сѣкущими къ окружности.

§ 211. *Отношеніемъ* одной величины къ другой, однородной съ ней, называется отвлеченное число, на которое надо умножить послѣднюю величину, чтобы получить первую. Чтобы означить отношеніе величины A къ другой величинѣ B, пишутъ $A:B$ или $\frac{A}{B}$.

§ 212. *Измѣрить* величину значитъ найти ея отношеніе къ другой величинѣ, принятой за единицу.

Покажемъ способъ для измѣренія прямой линіи. Если прямая, принятая за единицу, укладывается, содержится въ измѣряемой величинѣ ровно, безъ остатка, то въ этомъ случаѣ отношеніе измѣряемой величины къ единицѣ выразится цѣлымъ числомъ.

Фиг. 140-я.



Положимъ, что прямая ab, принятая за единицу, уложилась въ AB, напримѣръ, 2 раза съ остаткомъ DB. Если бъ нашлась такая часть единицы ab, которая укладывалась бы ровно въ прямой AB, то отношеніе прямой AB къ ab выразилась бы дробью; въ самомъ дѣлѣ, если напримѣръ $^1/_5$ часть единицы ab уложится ровно 12 разъ въ AB, то $AB = {}^{12}/_5\, ab$; слѣд. на основаніи опредѣленія отношенія (§ 211), получимъ $\frac{AB}{ab} = \frac{12}{5}$.

И такъ, для измѣренія прямой необходимо показать способъ отысканія такой прямой, которая укладывалась бы ровно, безъ остатка, въ единицѣ и въ измѣряемой прямой; такую прямую называютъ *общею мѣрою двухъ прямыхъ линій.*

Замѣтимъ, что общихъ мѣръ для двухъ прямыхъ множество; потому что $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ и т. д. отысканной общей мѣры также будетъ содержаться безъ остатка въ обѣихъ линіяхъ, т. е. въ измѣряемой и въ единицѣ. Между множествомъ общимъ мѣръ для двухъ прямыхъ есть одна, бо̀льшая всѣхъ остальныхъ; ее называютъ *общею наибольшею мѣрою.*

Вопросъ.

§ 213. *Найти общую наибольшую мѣру между двумя прямыми.*

Пусть AB и ab означаютъ двѣ данныя прямыя.

Фиг. 141-я.

Наложимъ меньшую линію ab на большую столько разъ, сколько возможно.

Пусть ab уложилась отъ A до C три раза съ остаткомъ CB, т. е.

$$AB = 3\,ab + CB\;.\;.\;.\;.\;.\;(1);$$

пусть остатокъ CB укладывается въ ab два раза съ остаткомъ Db, слѣдовательно

$$ab = 2CB + Db\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2);$$

пусть остатокъ Db въ прежнемъ остаткѣ CB содержится ровно два раза, безъ остатка; слѣдовательно

$$CB = 2Db\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Прямая Db будетъ общею мѣрою данныхъ линій. И дѣйствительно, вставивъ во (2) равенство, вмѣсто CB, ему равное $2Db$, получимъ,

$$ab = 2 \times 2Db + Db, \text{ слѣд. } ab = 5Db;$$

а изъ (1) равенства, при той же подстановкѣ, вмѣсто ab и CB, имъ равныхъ, получимъ

$$AB = 3 \times 5Db + 2Db, \text{ слѣд. } AB = 17Db.$$

Прямая Db есть *общая* мѣра для данныхъ прямыхъ AB и ab: она въ первой содержится 17 разъ, а во второй 5 разъ, въ обоихъ случаяхъ безъ остатка. Докажемъ, что Db есть *наибольшая* мѣра.

Наибольшая мѣра должна содержаться безъ остатка въ данныхъ прямыхъ AB и ab; слѣдовательно, по равенству (1), она должна содержаться безъ остатка и въ CB. Та же наибольшая мѣра содержится ровно въ ab и CB; слѣдовательно, по (2) равенству, она заключается безъ остатка и въ Db. Поэтому общая наибольшая мѣра не можетъ быть больше Db; и какъ Db заключается ровно въ AB и ab, то Db есть общая наибольшая мѣра.

Предъидущій способъ отыскиванія общей наибольшей мѣры сходенъ съ отыскиваніемъ общаго наибольшаго дѣлителя между двумя числами:

Меньшая линія накладывается на бóльшую, остатокъ накладывается на меньшую линію, новый остатокъ накладывается на первый остатокъ и т. д., — каждый остатокъ накладывается на предъидущій остатокъ; если одинъ изъ остатковъ уложится ровно въ предъидущемъ, то онъ и будетъ общею наибольшею мѣрою.

И такъ вопросъ объ измѣреніи прямой линіи рѣшенъ: стоитъ только взять произвольную единицу, напримѣръ аршинъ, футъ, дюймъ, найти общую наибольшую мѣру между данною прямою и избранною единицею, опредѣлить, сколько разъ эта мѣра содержится въ данной линіи и сколько въ единицѣ, и наконецъ первое число принять за числителя, а второе за знаменателя отношенія между измѣряемою прямою и единицею.

§ 214. То же относится къ измѣренію дугъ, причемъ за единицу принимается дуга, равная четверти окружности, описанная тѣмъ же радіусомъ, какимъ описана данная дуга.

§ 215. Бываютъ такія однородныя величины, которыя не имѣютъ общей мѣры; въ существованіи такихъ величинъ убѣждаемся изъ слѣдующаго предложенія:

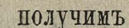
Предложеніе.

Ипотенуза и катетъ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника не имѣютъ общей мѣры.

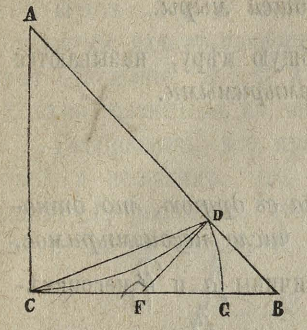
Пусть въ треугольникѣ ABC, уг. C—прямой и $AC = BC$: значитъ уголъ $A = B$, и каждый равенъ половинѣ прямаго.

Къ ипотенузѣ AB и катету AC примѣнимъ способъ отысканія общей наибольшей мѣры (§ 213). Такъ какъ ипотенуза

AB больше катета AC, ибо наклонная больше перпендикуляра, то отложимъ AC по AB, отъ точки A, или, что тоже, опишемъ дугу изъ точки A радіусомъ AC до пересѣченія ея съ ипотенузою AB; получимъ



Фиг. 142-я.



$$AB = AC + BD\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Замѣтимъ, что BD меньше AC; дѣйствительно, $AB < AC + BC$, слѣд. $AB < 2AC$, отсюда заключаемъ, что AC не содержится двухъ разъ въ AB. И такъ *катетъ AC содержится въ ипотенузѣ AB только одинъ разъ съ остаткомъ BD.*

Чтобы продолжать способъ отыскиванія общей наиб. мѣры, надобно посмотрѣть, сколько разъ BD содержится въ AC или въ BC (§ 213). Проведя черезъ точку D перпендикуляръ DF къ ипотенузѣ AB, вмѣстѣ съ тѣмъ отрѣжемъ $CF = BD$; ибо этотъ перпендикуляръ будетъ касательная къ окружности; значитъ въ углѣ CFD будетъ вписана окружность; слѣд., на основаніи § 209, $CF = DF$; а эта послѣдняя равна BD, потому что въ прямоугольномъ треугольникѣ BDF, уголъ B равенъ половинѣ прямаго; слѣд. и F равенъ половинѣ прямаго; значитъ бока, лежащіе противъ равныхъ угловъ B и F, равны между собою; изъ всего сказаннаго заключаемъ, что $CF = BD$, а

$$BC \text{ или } AC = BD + BF.$$

Очевидно, что $BF > BD$ (§ 49); слѣд. надобно еще узнать, сколько разъ BD содержится въ BF; для этого замѣтимъ, что треугольникъ BDF прямоуголенъ, и катеты его BD и DF равны; значитъ катетъ BD въ ипотенузѣ BF содержится только одинъ разъ съ остаткомъ BG; этотъ послѣдній получится, когда изъ точки F радіусомъ $FD = BD$ опишемъ дугу. Слѣд. $BF = BD + BG$ и

$$AC = 2BD + BG\ .\ .\ .\ (2).$$

Примѣняя къ прямоугольному треугольнику BDF, въ которомъ катетъ $DF = DB$, все сказанное о данномъ треугольникѣ ABC, найдемъ, что остатокъ BG содержится два раза въ катетѣ BD (въ первомъ остаткѣ), съ остаткомъ, и т. д. Отсюда видно, что способъ для отыскиванія общей наибольшей мѣры, между ипотенузою и катетомъ равнобедреннаго прямоугольнаго треуголь-

ника, всегда приводитъ къ остатку, сколько бы дѣйствіе ни продолжали; поэтому *ипотенуза и катетъ разнобедреннаго прямоугольнаго треугольника не имѣютъ общей мѣры*: или, что тоже, *діагональ и бокъ квадрата не имѣютъ общей мѣры.*

§ 216. Двѣ величины, имѣющія общую мѣру, называются *соизмѣримыми*, а не имѣющія ея — *несоизмѣримыми.*

Предложеніе.

§ 217. *Если величина несоизмѣрима съ другою, то отношеніе ея къ этой другой величинѣ есть число несоизмѣримое.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что величины a и b несоизмѣримы, и допустимъ, что отношеніе между ними $\frac{a}{b}$ есть соизмѣримое число $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа. И такъ положимъ, что $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, отсюда

$$a = p \cdot \frac{b}{q} \;.\;.\; (1);$$

очевидно, что
$$b = q \cdot \frac{b}{q} \;.\;.\; (2).$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ видно, что $\frac{b}{q}$ въ a содержится p разъ, и въ b содержится q разъ; значитъ a и b имѣютъ общу мѣру $\frac{b}{q}$; а это противно условію, по которому a и b несоизмѣримы, т. е. не имѣютъ общей мѣры. Слѣд. нельзя допустить, что отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ величинъ есть число соизмѣримое.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда двѣ величины несоизмѣримы, отношеніе между ними, какъ несоизмѣримое число, можетъ быть опредѣлено только по приближенію, и мы должны показать, что всегда можно найти приближеніе съ желаемою точностью.

Вопросъ.

§ 218. *Найти приближенное отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ прямыхъ линій.*

Отношенiе двухъ несоизмѣримыхъ линiй можетъ быть найдено только приблизительно, и вся сущность рѣшенія этого вопроса состоитъ въ томъ, чтобы найти приближенiе съ желаемою точностью.

Пусть A и B означаютъ двѣ прямыя, и требуется найти отношенiе ихъ съ точностью, напр. до $\frac{1}{10}$; это значитъ, что истинное отношенiе $A:B$ и его приближенiе, которое мы ищемъ, должны разниться на число меньше $\frac{1}{10}$.

Вообразимъ, что прямая B раздѣлена на 10 равныхъ частей, и положимъ, что, укладывая десятую часть прямой B по линiи A, оказалось, что A содержитъ 23 части, но не содержитъ 24-хъ частей, т. е.

$$A > 23 \times \frac{B}{10} \text{ и } A < 24 \times \frac{B}{10};$$

изъ этихъ неравенствъ получимъ

$$\frac{A}{B} > \frac{23}{10} \text{ и } \frac{A}{B} < \frac{24}{10};$$

слѣд. $\frac{A}{B}$ заключается между $\frac{23}{10}$ и $\frac{24}{10}$, которыя разнятся на $\frac{1}{10}$, поэтому отношенія $\frac{A}{B}$ и $\frac{23}{10}$ дадутъ разность, которая будетъ меньше $\frac{1}{10}$; значитъ

$$\frac{A}{B} = \frac{23}{10} \text{ съ точностью до } \frac{1}{10}.$$

§ 219. Приближенное отношенiе между дугами, описанными равными радiусами, находится точно такъ же, какъ и приближенное отношенiе между прямыми линiями.

Предложенiе.

§ 220. *Отношенiе между двумя углами равно отношенiю между дугами, заключающимися между боками этихъ угловъ и описанными равными радiусами изъ вершинъ, принятыхъ за центры.*

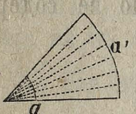
Пусть даны углы a и b; принимая вершины ихъ за центры, опишемъ дуги a' и b' произвольными, но равными радiусами, и докажемъ, что

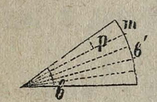
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Для этого надобно на самомъ дѣлѣ найти то и другое отношенiе и посмотрѣть, равны ли они между собою. Въ этомъ не представится затрудненiй, ибо намъ извѣстно, какъ ищется отношенiе между двумя дугами (§§ 214, 219), точно или по приближенiю, смотря по тому, будутъ ли дуги соизмѣримы или несоизмѣримы.

1) Пусть дуги a' и b' соизмѣримы, и общая ихъ мѣра m содержится 7 разъ въ a' и 5 разъ въ b'; слѣдовательно *отношенiе дугъ*

Фиг. 143-я.





$$\frac{a'}{b'} = \frac{7}{5}.$$

Каждой дугѣ m соотвѣтствуетъ центральный уголъ p; вслѣдствiе равенства дугъ, и центральные углы равны между собою; слѣд. уголъ a раздѣлится на 7, а b на 5 равныхъ частей; значитъ уголъ p есть общая мѣра угловъ a и b, и *отношенiе угловъ*

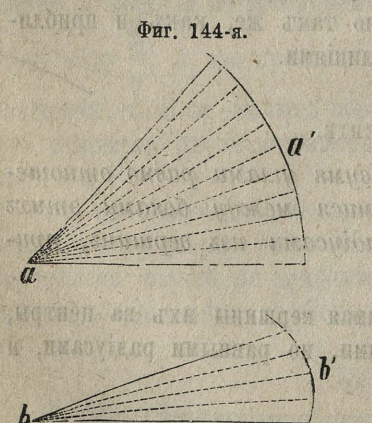
$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5}.$$

Изъ этихъ равенствъ имѣемъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

2) Пусть дуги a' и b' несоизмѣримы. Отношенiе ихъ можетъ быть найдено только по приближенiю, и мы должны доказать, что приближенiя отношенiй дугъ, съ одной стороны, и угловъ, съ другой, всегда равны между собою, при всякой степени приближенiя — *въ этомъ состоитъ понятiе о равенствѣ отношенiй несоизмѣримыхъ величинъ.*

Фиг. 144-я.



И такъ положимъ, что требуется найти отношенiе между дугами съ точностью, напримѣръ, до $^1/_4$. Для этого дугу b' раздѣлимъ на 4 равныя части и найденную часть будетъ укладывать въ дугѣ a'; положимъ, что она уложилась 9 разъ съ остаткомъ; поэтому

$$a' > 9.\frac{b'}{4} \text{ и } a' < 10.\frac{b'}{4};$$

отсюда $$\frac{a'}{b'} > \frac{9}{4} \text{ и } \frac{a'}{b'} < \frac{10}{4},$$

слѣдоват. $$\frac{a'}{b'} = \frac{9}{4} \text{ вѣрно до } 1/4.$$

Каждой дугѣ $\frac{b'}{4}$ соотвѣтствуетъ центральный уголъ, и всѣ эти углы равны между собою; слѣдовательно можно сказать, что уголъ b раздѣленъ на 4 равныя части, и одну изъ этихъ частей укладывали въ углѣ a, причемъ она уложилась 9 разъ съ остаткомъ; слѣдовательно

$$a > 9.\frac{b}{4} \text{ и } a < 10.\frac{b}{4};$$

отсюда $$\frac{a}{b} > \frac{9}{4} \text{ и } \frac{a}{b} < \frac{10}{4};$$

слѣдовательно $$\frac{a}{b} = \frac{9}{4} \text{ съ точностью до } 1/4.$$

Значитъ, приближенie отношенія дугъ a'/b' всегда равно приближенію отношенія соотвѣтственныхъ угловъ a/b; потому что, вмѣсто дѣленія дуги b' на 4 равныя части, можно дѣлить ее на какое угодно число. И такъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

какимъ бы числомъ ни выразилось одно изъ этихъ отношеній.

§ 221. Мы видѣли, что отношенie всякихъ двухъ центральныхъ угловъ равно отношенію соотвѣтственныхъ имъ дугъ, лишь бы только дуги эти были описаны равными радіусами, —въ этомъ смыслѣ говорятъ: центральные углы *пропорціональны* соотвѣтственнымъ дугамъ, если только онѣ описаны равными радіусами.

Вообще, *двѣ величины называются пропорціональными, если онѣ находятся въ такой зависимости, что съ измѣненіемъ одной измѣняется другая такъ, что отношенie какихъ нибудь двухъ количествъ, принадлежащихъ первой величинѣ, равно отношенію соотвѣтственныхъ имъ количествъ второй*

величины [1]). На основаніи этого опредѣленія, предложеніе предъидущаго § можно такъ выразить:

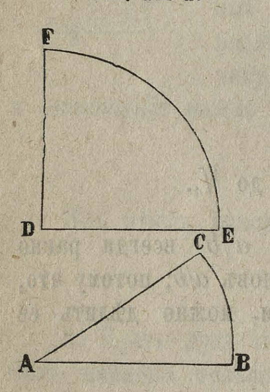
§ 222. *Углы пропорціональны дугамъ, заключающимся между ихъ боками и описаннымъ изъ вершинъ равными радіусами.*

Въ самомъ дѣлѣ, съ измѣненіемъ угла, т. е. съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ его, измѣняется и дуга, заключающаяся между его боками (§ 161); притомъ, на основаніи § 220, отношеніе какихъ нибудь двухъ угловъ равно отношенію соотвѣтственныхъ имъ дугъ, описанныхъ равными радіусами изъ вершинъ, какъ центровъ.

Предложеніе.

§ 223. *Центральный уголъ измѣряется дугою, заключающеюся между его боками.*

Фиг. 145-я.



Пусть требуется измѣрить уголъ A; это значитъ, требуется найти отношеніе угла A къ прямому углу D, принимаемому за единицу при измѣреніи угловъ. Принявъ вершины даннаго угла и прямаго за центры, опишемъ дуги BC и FE произвольными, но равными радіусами, $AB = DE$.

Намъ извѣстно (§ 220), что

$$\frac{\angle A}{\angle D} = \frac{\text{дуг. } BC}{\text{дуг. } EF}.$$

Поэтому измѣреніе угла A сводится на измѣреніе соотвѣтственной ему дуги BC, причемъ за единицу принимается дуга EF, равная четверти окружности; значитъ, слѣдуя способу, указанному въ §§ 214, 219, надо найти число, выражающее отношеніе дуги BC къ четверти окружности EF; это же число выразитъ и искомое отношеніе угла A къ прямому углу. Если найдемъ, напримѣръ, что отношеніе дугъ, $\frac{\text{дуг. } BC}{\text{дуг. } EF} = \frac{5}{6}$, то и отношеніе угловъ

$$\frac{\angle A}{\angle D} = \frac{5}{6};$$

слѣд. уголъ A составится изъ $\frac{5}{6}$-хъ частей прямаго угла D.

[1]) См. Ариѳметику Ф. Симашко, изд. VIII, 1885 г.

Возьмемъ равенство

$$\frac{\angle A}{\angle D}=\frac{\text{дуг. } BC}{\text{дуг. } EF},$$

въ немъ прямой уголъ D принимается за единицу при измѣреніи угловъ, и дуга EF, равная четверти окружности, принимается за единицу при измѣреніи дугъ; слѣдовательно можно написать

$$\frac{\angle A}{\angle 1}=\frac{\text{дуг. } BC}{\text{дуг. } 1}.$$

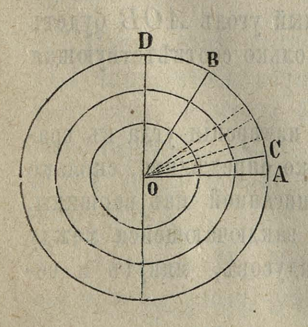
Это равенство показываетъ, что центральный уголъ A содержитъ столько угловыхъ единицъ, сколько соотвѣтствующая дуга содержитъ дуговыхъ единицъ. Въ этомъ смыслѣ говорятъ: *центральный уголъ измѣряется соотвѣтствующею ему дугою*, и для краткости пишутъ

$$\angle A=\text{дуг. } BC;$$

причемъ надо помнить, что въ этомъ равенствѣ подъ угломъ A и дугою BC подразумѣваются отвлеченныя числа, выражающія отношенія центральнаго угла къ прямому углу и, съ другой стороны, дуги къ четверти окружности. Эти то отношенія и будутъ равными между собою; безъ указаннаго замѣчанія было бы нелѣпо читать „уголъ равенъ дугѣ".

§ 224. Мы сказали, что за единицу для измѣренія угловъ принимается прямой уголъ, какъ постоянная величина. На этомъ основаніи и всякая опредѣленная часть прямаго угла можетъ быть принята за единицу. Весьма часто за единицу для измѣренія угловъ принимается $\frac{1}{90}$ часть прямаго угла, которую называютъ *градусомъ*.

Фиг. 146-я.



Вообразимъ, что прямой уголъ AOD раздѣленъ на 90 равныхъ частей или градусовъ; если изъ вершины его O, какъ центра, произвольными радіусами опишемъ нѣсколько окружностей, то между боками прямаго угла будутъ заключаться четверти каждой окружности; каждая изъ нихъ боками угловъ въ одинъ градусъ раздѣлится на 90 равныхъ частей; слѣд. каждая окружность будетъ раздѣлена на 90×4 или на 360 равныхъ частей.

Принято и дуги, заключающіяся между боками угловъ въ одинъ градусъ, называть также градусами; причемъ ихъ называютъ дуговыми градусами, въ отличіе отъ угловыхъ градусовъ; слѣд. всякая окружность дѣлится на 360 дуговыхъ градусовъ. Понятно, что дуги въ одинъ градусъ, заключающіяся между боками угла въ одинъ градусъ, но описанныя разными радіусами, не будутъ равными между собою: съ увеличеніемъ радіуса и дуги, соотвѣтствующія центральному углу въ одинъ градусъ, будутъ увеличиваться; между тѣмъ уголъ въ одинъ градусъ всегда постояненъ, какъ $\frac{1}{90}$ часть прямаго угла.

Уголъ въ одинъ градусъ принято дѣлить на 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами*; уголъ въ одну минуту дѣлятъ на 60 равныхъ частей, называемыхъ *секундами*. Принято также и дуги, соотвѣтствующія угламъ въ одну минуту и въ одну секунду, послѣдовательно называть минутами, секундами.

Для означенія градусовъ, минутъ и секундъ, безъ различія, будутъ ли они угловые или дуговые, употребляются знаки ($^\circ$), ($'$), ($''$); напримѣръ для означенія угла или дуги въ 15 градусовъ 45 минутъ и 10 секундъ пишутъ $15^\circ\ 45'\ 10''$.

§ 225. Посмотримъ теперь, какъ измѣрить уголъ, принявъ за единицу уголъ въ 1°. Пусть данъ уголъ AOB (фиг. 146), а уголъ AOC означаетъ 1°. Произвольнымъ радіусомъ OA, изъ вершины O, какъ центра, опишемъ окружность; на основаніи § 220, получимъ

$$\frac{\angle AOB}{\angle AOC}=\frac{\text{дуг. } AB}{\text{дуг. } AC}$$

или

$$\frac{\angle AOB}{\angle 1^\circ}=\frac{\text{дуг. } AB}{\text{дуг. } 1^\circ};$$

равенство это показываетъ, что центральный уголъ AOB будетъ содержать столько угловыхъ градусовъ, сколько соотвѣтствующая ему дуга содержитъ дуговыхъ градусовъ.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что для измѣренія угла въ градусахъ, минутахъ и секундахъ стоитъ только опредѣлить, сколько градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, описанной изъ вершины, какъ центра, *произвольнымъ* радіусомъ и заключающейся между боками даннаго угла; такое же число градусовъ, минутъ и секундъ будетъ въ измѣряемомъ углѣ.

Зная величину угла въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, можемъ найти его отношеніе къ прямому углу. Напримѣръ, если уголъ $A = 15^\circ$, а D означаетъ прямой уголъ, то, на основаніи § 220, имѣемъ

$$\frac{A}{D} = \frac{15^\circ}{90^\circ};$$

потому что углу въ 15° соотвѣтствуетъ и дуга въ 15°. Сокративъ дробь $\frac{15}{90}$, получимъ $\frac{1}{6}$; слѣд. уголъ A составляетъ шестую часть прямаго угла.

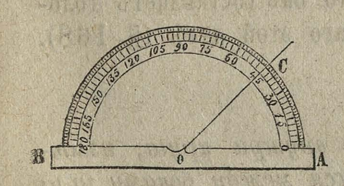
Если уголъ $A = 12^\circ\ 15'$, то

$$\frac{A}{D} = \frac{12^\circ\ 15'}{90^\circ} \text{ или } \frac{735}{5400};$$

слѣд. $\frac{A}{D} = 0{,}13$ — съ точностью до 0,01.

§ 226. Въ практикѣ для опредѣленія угла въ градусахъ и его частяхъ употребляется инструментъ, называемый *транспортиромъ*.

Фиг. 147-я.



Транспортиръ есть мѣдный или роговой полукругъ, раздѣленный на градусы; градусная надпись располагается по большей части въ обѣ противуположныя стороны отъ 0 до 180; центръ O окружности назначается на діаметрѣ (0....180) линейки AB транспортира.

Вопросъ I. *Уголъ начерченъ, опредѣлить число его градусовъ.*

Пусть данъ уголъ AOC; приставимъ транспортиръ къ боку OA такъ, чтобы центръ транспортира совпалъ съ вершиною даннаго угла, и чтобы бокъ OA угла совпалъ съ діаметромъ AB транспортира; число градусовъ дуги транспортира, заключающееся между боками OA и OC, покажетъ число градусовъ даннаго угла.

Вопросъ II. *На данной прямой OA, при ея точкѣ O, построить уголъ, равный данному числу градусовъ.*

Приставимъ транспортиръ къ данной прямой *OA* такъ, чтобы діаметръ его *AB* совпалъ съ бокомъ *OA*, а центръ совпалъ бы съ данною точкою *O*. Отмѣтивъ на бумагѣ то дѣленіе *C* на транспортирѣ, которое соотвѣтствуетъ данному углу, соединимъ точку *C* съ точкою *O*; получимъ искомый уголъ *AOC*.

§ 227. Когда уголъ начерченъ такимъ образомъ, что его бока составляютъ хорды, или касательные, или сѣкущіе окружности, то для измѣренія такого угла нѣтъ надобности описывать между его боками дуги, какъ объяснено въ § 223, а можно воспользоваться уже данною окружностью. Разсмотримъ всѣ случаи.

Предложеніе.

§ 228. *Вписанный уголъ измѣряется половиною дуги, заключающейся между его боками*; потому что онъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго этой дугѣ (§ 165), а центральный уголъ измѣряется соотвѣтствующею ему дугою (§ 223).

Предложеніе.

§ 229. *Уголъ, составленный хордою и касательною, проведенною черезъ конецъ этой хорды, измѣряется половиною заключающейся въ немъ дуги;* потому что онъ составляетъ половину центральнаго угла, соотвѣтствующаго этой дугѣ (§ 168).

Предложеніе.

§ 230. *Уголъ, котораго вершина внутри круга, измѣряется полусуммою дугъ, заключающихся между боками угла и ихъ продолженіемъ*; потому что онъ равенъ полусуммѣ центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между боками угла и ихъ продолженіями (§ 169).

Предложеніе.

§ 231. *Уголъ, котораго вершина внѣ круга, измѣряется полуразностью дугъ, заключающихся между его боками*; потому что онъ равенъ половинѣ разности центральныхъ угловъ, соотвѣтствующихъ дугамъ, заключающимся между его боками (§ 170).

---

19. Параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ двухъ линій, какъ ни есть проведенныхъ, пропорціональныя части. — Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ боковъ, раздѣляетъ двѣ прочія стороны на части пропорціональныя. — Обратное предложеніе. — Линіи, проведенныя изъ одной точки, раздѣляются параллельными прямыми на пропорціональныя части, а сами дѣлятъ параллельныя линіи на части, составляющія пропорцію. — Обратное предложеніе.—Прямая, дѣлящая пополамъ уголъ треугольника.—Обратное предложеніе.

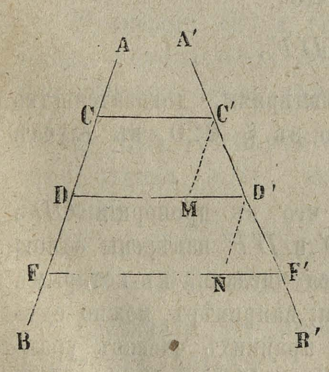
Предложеніе.

§ 232. *Если двѣ какія нибудь прямыя линіи разсѣчены параллельными прямыми, и если отрѣзки одной изъ этихъ двухъ прямыхъ, заключающіеся между параллельными, равны между собою, то соотвѣтственные отрѣзки на другой линіи также равны между собою.*

Пусть прямыя AB и $A'B'$ разсѣчены параллельными линіями CC', DD', FF'; положимъ еще, что отрѣзки $CD = DF$; надо доказать, что $C'D' = D'F'$.

Черезъ точки C' и D' проведемъ прямыя $C'M$ и $D'N$ параллельно прямой AB; въ треугольникахъ $C'D'M$ и $D'F'N$ сторона $C'M = D'N$, потому что $C'M = CD$, какъ параллельныя, заключающіяся между параллельными CC' и DM; по той же причинѣ $D'N = DF$, а $CD = DF$ по условію; углы этихъ треугольниковъ, прилежащіе къ бокамъ $C'M$ и $D'N$, равны между собою: $\angle C' = \angle D'$, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ линіяхъ $C'M$ и $D'N$, и сѣкущей $A'B'$; $\angle M = \angle N$, ибо бока ихъ параллельны и направлены въ одну сторону. Поэтому и остальныя сходственныя части треугольниковъ равны (§ 100); слѣдовательно $C'D' = D'F'$.

Фиг. 148-я.



Примѣчаніе. Если бъ прямыя AB и $A'B'$ были параллельны между собою, тогда о равенствѣ отрѣзковъ $C'D' = D'F'$ заключили бы на основаніи равенства частей параллельныхъ между параллельными (§ 74).

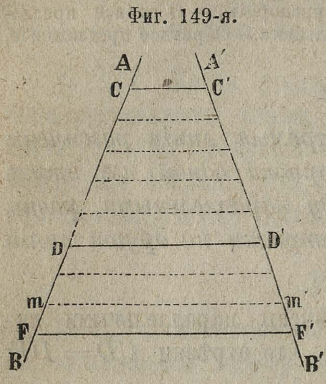
Предложеніе.

§ 233. *Двѣ прямыя разсѣкаются тремя параллельными линіями на части пропорціональныя.*

Пусть CC', DD', FF' параллельны; докажемъ, что

$$CD : DF = C'D' : D'F'.$$

Фиг. 149-я.



1) Положимъ, что CD и DF соизмѣримы и пусть общая ихъ мѣра Fm содержится 5 разъ въ CD и 3 раза въ DF; слѣд.

$$\frac{CD}{DF} = \frac{5}{3}.$$

Черезъ точки дѣленія частей линіи CD и DF проведемъ параллельныя къ линіи CC' до пересѣченія съ прямой $A'B'$; прямая $C'D'$ раздѣлится на 5 равныхъ частей, а $D'F'$ на 3 части, равныя между собою и равныя частямъ прямой $C'D'$; поэтому

$$\frac{C'D'}{D'F'} = \frac{5}{3}.$$

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ, что

$$CD : DF = C'D' : D'F'.$$

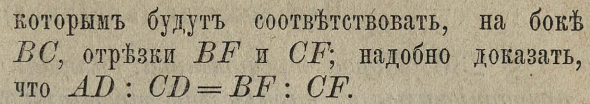
2) Когда линіи CD и DF несоизмѣримы, доказательство будетъ такое же, какое было изложено въ § 220, въ случаѣ несоизмѣримыхъ дугъ.

Примѣчаніе. Если предположимъ, что въ пропорціи $CD : DF = C'D' : D'F'$ линіи CD, DF, $C'D'$ и $D'F'$ измѣрены одною единицею, то члены пропорціи выразятся числами, къ которымъ можно примѣнить всѣ свойства пропорціи; напримѣръ, можно сдѣлать перестановку членовъ, произведеніе крайнихъ членовъ уравнять произведенію среднихъ, такъ $CD \times D'F' = C'D' \times DF$, и проч.

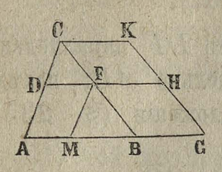
Предложеніе.

§ 234. *Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ боковъ, раздѣляетъ два прочіе бока на части пропорціональныя.*

Въ треугольникѣ ABC проведемъ хорду DF параллельно боку AB; тогда на бокѣ AC получимъ два отрѣзка AD и CD,


которымъ будутъ соотвѣтствовать, на бокѣ BC, отрѣзки BF и CF; надобно доказать, что $AD : CD = BF : CF$.

Фиг. 150-я.



Черезъ вершину C проведемъ прямую CK параллельно боку AB, а черезъ какую нибудь точку G, взятую на продолженіи AB, проведемъ GK параллельно боку BC; такимъ образомъ получимъ двѣ прямыя AC и GK, разсѣченныя тремя параллельными AG, DH и CK; вслѣдствіе предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$AD : CD = GH : KH,\ AC : CD = GK : KH,\ AC : AD = GK : GH.$$

Но $GH = BF$, $KH = CF$, $GK = BC$, какъ части параллельныхъ, заключающихся между параллельными; слѣдовательно, подставляя въ предъидущія пропорціи, вмѣсто GH, KH и GK, имъ равныя, получимъ

$$AD : CD = BF : CF \ldots (1),$$
$$AC : CD = BC : CF \ldots (2),$$
$$AC : AD = BC : BF \ldots (3).$$

Пропорціи (2) и (3) показываютъ, что *хорда треугольника, параллельная одному изъ боковъ, отдѣляетъ отрѣзки отъ другихъ боковъ, пропорціональные этимъ бокамъ.*

§ 235. Слѣдствіе. Проведя FM параллельно боку AC треугольника ABC, на основаніи предъидущаго предложенія, получимъ

$$BC : CF = AB : AM;$$

но $AM = DF$, слѣд. $BC : CF = AB : DF$.

Сравнивая эту пропорцію со (2) пропорціею предъидущаго параграфа, получимъ

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CF} = \frac{AB}{DF}.$$

Предъидущіе члены этихъ отношеній суть стороны треугольника ABC, а послѣдующіе члены — стороны треугольника CDF, отрѣзаннаго хордою DF, параллельною боку AB. Поэтому:

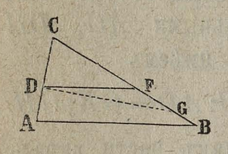
Хорда, параллельная боку треугольника, отрѣзываетъ треугольникъ, котораго стороны пропорціональны сторонамъ перваго треугольника; причемъ пропорціональныя стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ.

Предложеніе (обратное).

§ 236. *Хорда треугольника, дѣлящая два бока на части пропорціональныя, параллельна третьему боку.*

Пусть $AC : CD = BC : CF$; докажемъ, что DF параллельна AB. Черезъ точку D проведемъ DG параллельно AB; вслѣдствіе предъидущаго предложенія (§ 235), получимъ

Фиг. 151-я.



$$AC : CD = BC : CG.$$

Сравнивая члены этой пропорціи съ членами данной, найдемъ что, $CG = CF$; поэтому точка G должна совпасть съ F, и прямая DG, параллельная AB, совпадетъ съ DF: значитъ хорда DF параллельна боку AB.

Предложеніе.

§ 237. *Прямыя линіи, проведенныя изъ одной точки, дѣлятся параллельными прямыми на пропорціональныя части, и сами дѣлятъ параллельныя линіи на части, составляющія пропорцію.*

Положимъ, что $FK \parallel AD$; докажемъ, что

Фиг. 152-я.

$$1)\ \frac{AF}{FO} = \frac{BG}{GO} = \frac{CH}{HO} = \frac{DK}{KO}.$$

Хорда FG треугольника ABO параллельна боку AB, слѣдовательно

$$AF : FO = BG : GO \ldots . (1).$$

Хорда GH треугольника BCO параллельна боку BC, слѣдовательно

$$BG : GO = CH : HO \ldots . (2).$$

Хорда HK треугольника CDO параллельна боку CD, слѣд.

$$CH : HO = DK : KO \ldots . (3).$$

Въ каждыхъ двухъ изъ этихъ трехъ пропорцій есть по общему отношенію; слѣдовательно всѣ отношенія равны между собою, и

$$AF : FO = BG : GO = CH : HO = DK : KO.$$

2) Докажемъ, что

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}.$$

Хорда FG треугольника ABO, параллельная боку AB, отрѣзываетъ треугольникъ FGO, котораго бока пропорціональны сторонамъ треугольника ABO (§ 235); слѣд.

$$AB:FG=BO:GO.$$

По той же причинѣ изъ треугольниковъ BCO и GHO получимъ

$$BC:GH=CO:HO;$$

изъ треугольниковъ CDO и HKO

$$CD:HK=CO:HO.$$

Вторыя отношенія этихъ трехъ пропорцій равны между собою (§ 234); слѣдовательно

$$AB:FG=BC:GH=CD:HK.$$

Предложеніе (обратное).

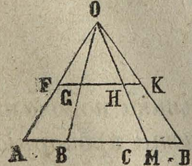
§ 238. *Прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки дѣленія параллельныхъ линій на части пропорціональныя, пересѣкаются въ одной точкѣ.*

Пусть FK параллельна AD, и

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HK}.$$

Положимъ, что прямыя AF и BG пересѣкаются въ точкѣ O; требуется доказать, что прямыя HC и DK пройдутъ черезъ точку O. Черезъ точки O и H проведемъ прямую, и положимъ, что она пересѣчетъ AD въ точкѣ M; на основаніи предъидущаго предложенія, получимъ

Фиг. 153-я.



$$AB:FG=BM:GH;$$

а по условію

$$AB:FG=BC:GH.$$

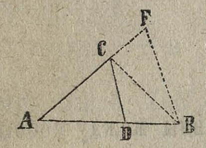
Въ этихъ двухъ пропорціяхъ три члена одной равны тремъ членамъ другой, слѣдовательно и четвертые члены равны, т. е. $BM=BC$; поэтому прямая OH пройдетъ черезъ точку C. Точно также докажется, что прямая OK пройдетъ черезъ точку D;

слѣдовательно всѣ прямыя AF, BG, CH и DK пересѣкаются въ одной точкѣ O.

Предложеніе.

§ 239. *Прямая, дѣлящая пополамъ уголъ треугольника, раздѣляетъ противолежащій бокъ на части пропорціональныя другимъ бокамъ.*

Фиг. 154-я.



Пусть CD дѣлитъ пополамъ уголъ ACB треугольника ABC; докажемъ, что

$$AD:DB=AC:BC.$$

Черезъ точку B проведемъ BF параллельно CD до пересѣченія съ продолженной AC. Въ треугольникѣ ABF хорда CD параллельна боку BF; слѣдовательно

$$AD:DB=AC:CF.$$

Вслѣдствіе параллельности линій CD и BF, при сѣкущей AF, соотвѣтственные углы равны, слѣдовательно

$$\angle F=\angle ACD;$$

при тѣхъ же параллельныхъ и сѣкущей BC, внутренніе противоположные углы равны, слѣдовательно

$$\angle FBC=\angle BCD.$$

По условію углы ACD и BCD равны между собою; слѣдовательно $\angle F=\angle FBC$, и стороны, противолежащія этимъ угламъ въ треугольникѣ BCF также равны, т. е. $BC=CF$. Подставивъ въ предъидущую пропорцію, вмѣсто CF, ей равное, получимъ

$$AD:DB=AC:BC.$$

Предложеніе (обратное).

§ 240. *Прямая раздѣлитъ уголъ треугольника пополамъ, если она дѣлитъ противолежащій бокъ на части пропорціональныя остальнымъ бокамъ* (фиг. 154).

Пусть $AD:DB=AC:BC$;

докажемъ, что $\angle ACD=\angle BCD$. Проведемъ BF параллельно CD, получимъ (§ 234)

$$AD:DB=AC:CF.$$

Изъ сравненія этой пропорціи съ данною, заключаемъ, что $BC = CF$; слѣдовательно въ треугольникѣ BCF (§ 93)

$$\angle F = \angle CBF \ldots (1);$$

а вслѣдствіе параллельности CD и BF, имѣемъ: $\angle F = \angle ACD$, какъ соотвѣтственные, $\angle CBF = \angle BCD$, какъ внутренніе противоположные. Вставимъ, вмѣсто F и CBF, въ (1), имъ равные, получимъ $\angle ACD = \angle BCD$.

---

1. Подобіе треугольниковъ*).

§ 241. Мы видѣли (§ 234), что хорда, параллельная одному изъ боковъ треугольника, отсѣкаетъ другой треугольникъ, котораго сходственны стороны пропорціональны сторонамъ перваго треугольника, и углы одного равны угламъ другого; такіе треугольники называются *подобными*. Слѣдовательно, для всякаго треугольника можно получить сколько угодно подобныхъ ему треугольниковъ, — стоитъ только проводить хорды, которыхъ множество, параллельно какому нибудь его боку, до пересѣченія съ другими боками или ихъ продолженіями. И такъ:

Два треугольника называются подобными, если углы одного равны, порознь, угламъ другого, и сходственныя стороны пропорціональны.

Предложеніе.

§ 242. *Два треугольника подобны, если углы одного изъ нихъ равны, порознь, угламъ другого.*

Фиг. 155-я.

Пусть въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ углы A, B, C соотвѣтственно равны угламъ A', B', C'; надобно доказать (§ 241), что стороны этихъ треугольниковъ пропорціональны. Отложимъ $CD = C'A'$ и проведемъ DF параллельно боку AB; получимъ (§ 234)

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CF} = \frac{AB}{DF}.$$

Въ треугольникахъ CDF и $A'B'C'$ стороны CD и $C'A'$ равны между собою, и углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ,

*) Этимъ вопросомъ начинается курсъ V кл. кадетскихъ корпусовъ.

равны порознь. Дѣйствительно, $\angle C = \angle C'$ по условію; уголъ D равенъ своему соотвѣтственному A, при параллельныхъ DF и AB, и сѣкущей AC; а $\angle A = \angle A'$ по условію; слѣдовательно $\angle D = \angle A'$. Равенство упомянутыхъ частей влечетъ равенство сходственныхъ сторонъ: $CF = C'B'$, $DF = A'B'$. Подставляя въ предъидущія отношенія, вмѣсто CD, CF и DF, имъ равныя, получимъ

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

И такъ въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ углы равны, и сходственныя стороны пропорціональны; слѣдовательно треугольники подобны.

Предложеніе (обратное).

§ 243. *Два треугольника подобны, если стороны одного пропорціональны сторонамъ другого.*

Фиг. 155-я.

Пусть $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \ldots (1).$

Надобно доказать, что $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C$.

Отложимъ $CD = A'C'$ и проведемъ DF параллельно AB; получимъ (§ 234)

$$\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CF} \ldots (2).$$

Раздѣливъ отношенія (1) на соотвѣтствующія имъ отношенія (2), получимъ

$$\frac{DF}{A'B'} = \frac{CD}{A'C'} = \frac{CF}{B'C'}.$$

Но $CD = A'C'$, слѣдовательно отношеніе $\frac{CD}{A'C'} = 1$; значитъ $\frac{DF}{A'B'} = \frac{CF}{B'C'} = 1$; отсюда $DF = A'B'$, $CF = B'C'$.

И такъ, стороны треугольника DCF равны, порознь, сторонамъ треугольника $A'B'C'$; поэтому $\angle D = \angle A'$. Но $\angle D = \angle A$ (§ 71, 5-е), слѣдовательно $\angle A = \angle A'$. Изъ этихъ же треугольниковъ имѣемъ $\angle C = \angle C'$; а равенство двухъ угловъ въ двухъ

треугольникахъ влечетъ равенство третьихъ угловъ: $\angle B = \angle B'$. Впрочемъ, равенство этихъ послѣднихъ угловъ можно доказать точно такимъ образомъ, какъ сейчасъ было доказано равенство $\angle A = \angle A'$.

Предложеніе.

§ 244. *Два треугольника подобны, если двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другого, а углы между этими сторонами равны между собою* (фиг. 155).

Пусть $\angle C = \angle C'$

и $AC : A'C' = BC : B'C'$;

докажемъ, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Отложивъ $CD = A'C'$ и проведя DF параллельно боку AB, получимъ $AC : CD = BC : CF$.

Сравнивая эту пропорцію съ данною, найдемъ, что $CF = B'C'$, потому что три члена одной пропорціи равны тремъ членамъ другой. Поэтому, въ треугольникахъ CDF и $A'B'C'$ двѣ стороны CD и CF равны сторонамъ $A'C'$ и $B'C'$, и углы между ними C и C' равны; слѣдовательно остальныя части треугольниковъ также равны, именно: $\angle D = \angle A'$. Но углы D и A также равны между собою, какъ соотвѣтственные при параллельныхъ AB и DF, и сѣкущей AC; слѣдовательно $\angle A' = \angle A$; а вслѣдствіе равенства двухъ $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$, и третьи углы B и B' равны. И такъ, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (§ 241).

Предложеніе.

§ 245. *Два треугольника подобны, если двѣ стороны одного пропорціональны двумъ сторонамъ другого, и углы, лежащіе противъ большихъ изъ этихъ сторонъ, равны между собою.*

Фиг. 156-я.

B, D, A, F, C, B′, A′, C′

Пусть въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, $AB : A'B' = BC : B'C'$, притомъ бокъ BC больше AB, и $\angle A = \angle A'$; надо доказать, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Отложимъ $AD = A'B'$ и проведемъ DF параллельно BC; получимъ треугольникъ ADF, подобный треугольнику ABC (§ 241); остается доказать, что треугольникъ ADF равенъ

треугольнику $A'B'C'$. Вслѣдствіе подобія треугольниковъ ADF и ABC, имѣемъ

$$AB : AD = BC : DF,$$

а по условію $$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ первые три члена равны между собою, слѣд. и четвертые члены равны, т. е. $DF = B'C'$. И такъ въ треугольникахъ ADF и $A'B'C'$ двѣ стороны, порознь, равны: $DF = B'C'$, $AD = A'B'$, $\angle A = \angle A'$; притомъ DF больше AD; ибо, переставивъ средніе члены въ пропорціи $AB : AD = BC : DF$, получимъ $AB : BC = AD : DF$; но, по условію $BC > AB$, слѣд. и $DF > AD$; значитъ треугольники ADF и $A'B'C'$ равны между собою (§ 107).

§ 246. Слѣдствіе. *Два треугольника подобны, если ипотенуза и катетъ одного пропорціональны тѣмъ же частямъ другого треугольника.*

Предложеніе.

§ 247. *Два треугольника подобны, если стороны ихъ взаимно параллельны, или если онѣ взаимно перпендикулярны.*

И дѣйствительно, намъ извѣстно (§ 112 и § 113), что треугольники равноугольны, когда ихъ стороны параллельны или перпендикулярны, а равноугольные треугольники подобны (§ 242).

Замѣтимъ при этомъ, что сходственными сторонами будутъ тѣ, которыя взаимно параллельны или взаимно перпендикулярны; потому что эти стороны лежатъ противъ равныхъ угловъ.

Поэтому, если A, B и C означаютъ стороны одного треугольника, a, b и c — стороны другого; притомъ, если A параллельна или перпендикулярна a, B параллельна или перпендикулярна b, C параллельна или перпендикулярна c, то имѣемъ

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

§ 248. Сравнивая предложенія о равенствѣ треугольниковъ съ предложеніями, относящимися къ ихъ подобію, найдемъ, что замѣняя въ первыхъ слово *равны*, относящееся къ сторонамъ, словомъ *пропорціональны*, получимъ предложенія о подобіи треугольниковъ. Исключеніе составляетъ тотъ случай, когда въ треугольникахъ есть только по одной равной сторонѣ: тутъ замѣны

равенства пропорціональностію и не можетъ быть потому, что двѣ стороны, одна одного, а другая другаго треугольника, не составляютъ пропорціи. По этому, помня признаки равенства треугольниковъ, будемъ знать и признаки ихъ подобія: остается только запомнить, что равноугольные треугольники подобны.

Предложеніе.

§ 249. *Въ подобныхъ треугольникахъ сходственныя основанія пропорціональны высотамъ.*

Фиг. 157-я.

Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, и $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$; слѣд. AC и $A'C'$ будутъ сходственные бока; примемъ ихъ за основанія и проведемъ высоты BD и $B'D'$. Треугольники ABD и $A'B'D'$ подобны; ибо прямой уголъ $ADB = \angle A'D'B'$, а по условію, $\angle A = \angle A'$; слѣд.

$$AB : A'B' = BD : B'D';$$

а вслѣдствіе подобія данныхъ треугольниковъ, имѣемъ

$$AB : A'B' = AC : A'C';$$

изъ этихъ двухъ пропорцій, по причинѣ общаго у нихъ отношенія, получимъ

$$AC : A'C' = BD : B'D'.$$

---

2. Подобные многоугольники.—Разложеніе ихъ на подобные треугольники.—Периметры подобныхъ полигоновъ пропорціоналы сходственнымъ бокамъ.

§ 250. Мы видѣли (§ 241), что для всякаго треугольника можно получить сколько угодно треугольниковъ, которыхъ углы соотвѣтственно равны угламъ даннаго треугольника и сходственныя стороны пропорціональны. Покажемъ, что и для всякаго многоугольника можно найти сколько угодно многоугольниковъ, удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ; при этомъ замѣтимъ, что *сходственными* сторонами двухъ многоугольниковъ называются тѣ стороны, которыя соединяются вершины равныхъ угловъ.

Возьмемъ какой нибудь многоугольникъ $ABCDF$; проведемъ діагонали изъ вершины A во всѣ прочія вершины; на бокѣ AB

означимъ произвольную точку B' и проведемъ хорду $B'C'$ параллельно боку BC треугольника ABC; черезъ C' проведемъ хорду $C'D'$ параллельно CD; наконецъ черезъ D' — хорду $D'F'$ параллельно боку DF треугольника ADF: такимъ образомъ получимъ многоугольникъ $AB'C'D'F'$, котораго *углы равны угламъ даннаго многоугольника.* Докажемъ, что стороны этихъ многоугольниковъ пропорціональны.

Изъ подобія треугольниковъ ABC и $AB'C'$ (§ 241)

Фиг. 158-я.

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{AC'}{AC}\ldots(1).$$

Изъ подобія треугольниковъ ACD и $AC'D'$

$$\frac{AC'}{AC}=\frac{D'C'}{DC}=\frac{AD'}{AD}\ldots(2).$$

Изъ подобія треугольниковъ ADF и $AD'F'$

$$\frac{AD'}{AD}=\frac{D'F'}{DF}=\frac{AF'}{AF}\ldots(3).$$

Въ равенствахъ (1), (2) и (3) есть общія отношенія; слѣдовательно

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{D'C'}{DC}=\frac{D'F'}{DF}=\frac{AF'}{AF},$$

гдѣ AB' и AB, $B'C'$ и BC и т. д. суть сходственныя стороны: AB' и AB соединяютъ вершины равныхъ угловъ $\angle A=\angle A$, $\angle B'=\angle B$; $B'C'$ и BC соединяютъ вершины равныхъ угловъ, $\angle B'=\angle B$, $\angle D'C'B'=\angle DCB$ и т. д.

Итакъ, по данному многоугольнику $ABCDF$, мы построили многоугольникъ $AB'C'D'F'$, котораго углы соотвѣтственно равны угламъ даннаго многоугольника, а сходственныя стороны пропорціональны сторонамъ даннаго многоугольника.

Примѣчаніе. Понятіе, изложенное здѣсь о сходственныхъ сторонахъ многоугольниковъ, примѣняется и къ треугольникамъ: и дѣйствительно, въ треугольникахъ мы назвали сходственными сторонами тѣ, которыя лежатъ противъ равныхъ угловъ; но онѣ также соединяютъ вершины равныхъ угловъ, потому что въ подобныхъ треугольникахъ всѣ углы одного треугольника равны всѣмъ угламъ другого.

§ 251. *Два многоугольника называются подобными, если углы одного равны, порознь, угламъ другого, и сходственныя стороны пропорціональны.*

По этому опредѣленію подобны между собою: 1) всѣ квадраты, потому что углы одного равны угламъ другаго, какъ прямые; а стороны ихъ пропорціональны, вслѣдствіе равенства ихъ въ каждомъ квадратѣ; 2) ромбы, имѣющіе по равному углу; 3) прямоугольники, въ которыхъ двѣ смежныя стороны пропорціональны; 4) параллелограммы, имѣющіе по равному углу между пропорціональными сторонами.

Предложеніе.

§ 252. *Два многоугольника подобны, если діагонали, проведенныя изъ одной вершины, въ каждомъ, во всѣ прочія, дѣлятъ ихъ на треугольники подобные и одинаково расположенные.*

Фиг. 159-я.

Пусть діагонали, проведенныя изъ вершинъ A и A' многоугольниковъ $ABCDF$ и $A'B'C'D'F'$, даютъ подобные треугольники ABC и $A'B'C'$, ACD и $A'C'D'$, ADF и $A'D'F'$, одинаковое ихъ расположеніе видно изъ чертежа. Докажемъ, что многоугольники $ABCDF$ и $A'B'C'D'F'$ подобны.

1) Углы этихъ многоугольниковъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, уголъ A состоитъ изъ угловъ BAC, CAD, DAF, которые, порознь и соотвѣтственно, равны угламъ $B'A'C'$, $C'A'D'$, $D'A'F'$, составляющимъ уголъ A', потому что треугольники ABC, BCD, ADF подобны треугольникамъ $A'B'C'$, $A'C'D'$, $A'D'F'$ и одинаково съ ними расположены; а въ подобныхъ треугольникахъ углы соотвѣтственно равны.

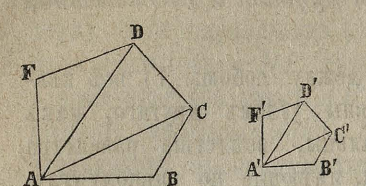
2) Сходственныя стороны пропорціональны.

Изъ подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ имѣемъ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Изъ подобія треугольниковъ ACD и $A'C'D'$:

Фиг. 159-я.



$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'};$$

изъ подобія треугольниковъ ADF и $A'D'F'$:

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{A'F'}.$$

Въ этихъ равенствахъ есть общія отношенія; поэтому всѣ отношенія равны между собою, и

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{A'F'}.$$

Итакъ многоугольники подобны (§ 251).

Предложеніе (обратное).

§ 253. *Два подобные многоугольника діагоналями, проведенными изъ вершинъ равныхъ угловъ, разбиваются на треугольники подобные и одинаково расположенные.*

Пусть многоугольникъ $ABCDF$ подобенъ $A'B'C'D'F'$, и уголъ $BAF=B'A'F'$; докажемъ, что треугольники ABC и $A'B'C'$, ACD и $A'C'D'$, AFD и $A'F'D'$ подобны.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны потому, что стороны AB и BC пропорціональны $A'B'$ и $B'C'$, какъ сходственные бока подобныхъ многоугольниковъ, и углы B и B' между этими сторонами равны, какъ углы тѣхъ же многоугольниковъ (§ 251).

Чтобы доказать подобіе и одинаковое расположеніе треугольниковъ ACD и $A'C'D'$, объяснимъ сперва, что $\angle ACD=\angle A'C'D'$. Дѣйствительно, по условію $\angle BCD=\angle B'C'D'$; вслѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$; $\angle BCA=B'C'A'$

слѣд. $\quad \angle BCD-\angle BCA=\angle B'C'D'-\angle BCA,$
или $\quad \angle ACD=\angle A'C'D'.$

Изъ подобія многоугольниковъ имѣемъ также

$$BC:B'C'=CD:C'D';$$

а изъ подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$,

$$BC:B'C'=AC:A'C',$$

слѣд. $\quad CD:C'D'=AC:A'C';$

значитъ треугольники ACD и $A'C'D'$, имѣя равные углы ACD и $A'C'D'$, между пропорціональными сторонами—подобны.

Также докажется подобіе остальныхъ треугольниковъ, сколько бы ихъ ни было; впрочемъ подобіе послѣднихъ треугольниковъ ADF и $A'D'F'$ можно доказать и тѣмъ способомъ, какимъ было доказано подобіе первыхъ треугольниковъ, ABC и $A'B'C'$.

Предложеніе.

§ 254. *Периметры подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны сходственнымъ бокамъ.*

Пусть многоугольники $ABCDF$ и $A'B'C'D'F'$ подобны; слѣдовательно стороны ихъ пропорціональны

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DF}{D'F'}=\frac{AF}{A'F'}.$$

Въ ряду равныхъ отношеній сумма предъидущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ изъ предъидущихъ къ своему послѣдующему; сумма предъидущихъ составитъ периметръ многоугольника $ABCDF$, а сумма послѣдующихъ—периметръ другого многоугольника; каждый же изъ предъидущихъ съ своимъ послѣдующимъ составляютъ сходственныя стороны многоугольниковъ; слѣдовательно предложеніе доказано.

---

3. Свойство перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямаго угла на ипотенузу.—Примѣненіе этого свойства къ зависимости между боками прямоугольнаго и косоугольнаго треугольниковъ.

Предложеніе.

§ 255. *Если изъ вершины прямаго угла опустить перпендикуляръ на ипотенузу, то*

1) *перпендикуляръ будетъ линіею среднею пропорціональною между отрѣзками ипотенузы;*

2) *каждый катетъ будетъ линіею среднею пропорціональною между ипотенузою и прилежащимъ къ нему отрѣзкомъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой; проведемъ CD перпендикулярно къ ипотенузѣ AB, и докажемъ, что

1) $AD : CD = CD : BD$. Стороны острыхъ угловъ A и BCD взаимно перпендикулярны, слѣдовательно эти углы равны (§ 79); поэтому, въ треугольникахъ ACD и BCD, кромѣ прямыхъ угловъ, два упомянутые острые угла равны; слѣдовательно и третьи углы равны, именно: $\angle ACD = \angle CBD$, и треугольники подобны (§ 241). Значитъ, сходственныя стороны пропорціональны: сторонѣ AD треугольника ACD сходственная въ другомъ треугольникѣ — CD, а сторонѣ CD перваго треугольника — сходственная BD въ другомъ треугольникѣ; и такъ $AD : CD = CD : BD$.

Фиг. 160-я.

2) $AD : AC = AC : AB$ и $BD : BC = BC : AB$.

Треугольники ACD и ABC подобны, потому что въ нихъ есть по прямому углу, а уголъ A общій обоимъ треугольникамъ; слѣдовательно третьи углы равны $\angle ACD = \angle B$; впрочемъ, равенство этихъ угловъ сейчасъ было объяснено. Для стороны AD треугольника ACD сходственною будетъ AC въ треугольникѣ ABC, потому что обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ ACD и B; а для AC перваго треугольника сходственною будетъ AB, потому что обѣ лежатъ противъ прямыхъ угловъ. И такъ $AD : AC = AC : AB$. Точно также, изъ подобія треугольниковъ BCD и ABC, получимъ

$$BD : BC = BC : AB.$$

Предложеніе.

§ 256. *Квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C прямой; докажемъ, что если ипотенуза AB и катеты AC и BC измѣрены, то три числа, происшедшія отъ этого измѣренія, будутъ въ такой зависимости, что квадратъ числа, выражающаго ипотенузу, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, выражающихъ катеты; для краткости же говорятъ: квадратъ ипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, и пишутъ такъ:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Фиг. 161-я.

Проведя CD перпендикулярно къ ипотенузѣ AB, получимъ (§ 255)

$$AD : AC = AC : AB,$$
$$BD : BC = BC : AB;$$

отсюда, уравнявъ произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ членовъ, получимъ

$$\overline{AC}^2 = AB \times AD,$$
$$\overline{BC}^2 = AB \times BD.$$

Должно замѣтить, что какъ подъ членами предъидущихъ двухъ пропорцій должно разумѣть числа, служащія мѣрою этихъ линій, то вслѣдствіе этого можно уравнять произведеніе крайнихъ произведенію среднихъ.

Произведеніе двухъ линій и вообще двухъ величинъ не имѣетъ смысла; необходимо одинъ множитель долженъ быть отвлеченнымъ числомъ.

Когда говорится: произведеніе двухъ линій, то подъ этимъ должно всегда разумѣть произведеніе чиселъ, служащихъ мѣрою этихъ линій, измѣренныхъ одною и тою же единицею.

Сложимъ предъидущія равенства, и во второй части отдѣлимъ AB общимъ множителемъ, получимъ

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times (AD + BD);$$

но $AD + BD = AB$, слѣдовательно

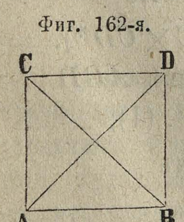
$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2.$$

§ 257. Слѣдствіе I. Изъ предъидущаго равенства имѣемъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2;$$

и такъ, *квадратъ катета равенъ квадрату ипотенузы безъ квадрата другого катета.*

Фиг. 162-я.



§ 258. Слѣдствіе II. Возьмемъ квадратъ $ABDC$ и проведемъ діагональ BC. Изъ прямоугольнаго треугольника ABC получимъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2;$$

$$\text{слѣд. } \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = 2, \text{ отсюда } \frac{BC}{AB} = \sqrt{2}.$$

И такъ, *отношеніе діагонали квадрата къ его боку равно квадратному корню изъ 2-хъ.*

Изъ алгебры извѣстно, что $\sqrt{2}$ есть число несоизмѣримое; поэтому діагональ квадрата съ его бокомъ несоизмѣримы.

Предложенiе (обратное).

§ 259. *Если квадратъ стороны треугольника равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ двухъ сторонъ, то уголъ, противолежащiй первой сторонѣ, равенъ прямому.*

Пусть въ треугольникѣ ABD, $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$; докажемъ, что уголъ ADB равенъ прямому. Изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DC къ боку BD и отложимъ $DC = AD$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ BDC

Фиг. 163-я.

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

а по условiю $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$;

слѣдовательно $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$, отсюда $AB = BC$. Итакъ, три стороны треугольника ABD равны тремъ сторонамъ треугольника BCD; а потому $\angle ADB = \angle BDC$. Но такъ какъ этотъ послѣднiй уголъ — прямой, то и уголъ ADB прямой.

Предложенiе.

§ 260. *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ тупаго угла, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ сторонъ, вмѣстѣ съ удвоеннымъ произведенiемъ одной изъ этихъ сторонъ на ея отрѣзокъ, прилежащiй къ вершинѣ тупаго угла и отсѣкаемый перпендикуляромъ, отпущеннымъ изъ противолежащей вершины на эту сторону.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ C тупой и BD перпендикулярна къ AC; докажемъ, что

Фиг. 164-я.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times CD\text{*)}.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \quad \dots . (1);$$

но изъ прямоугольнаго треугольника BCD имѣемъ

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 \quad (\S\ 257);$$

очевидно $AD = AC + CD$; а по возвышенiи въ квадратъ частей этого равенства, получимъ

*) Какъ въ этомъ предложенiи, такъ и въ слѣдующемъ, отрѣзокъ считается отъ вершины разсматриваемаго угла до основанiя перпендикуляра.

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC \times CD.$$

Наконецъ, вставивъ въ (1) равенство, вмѣсто $\overline{BD}^2$ и $\overline{AD}^2$, имъ равныя, по сокращеніи члена $\overline{CD}^2$, получимъ

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC \times CD.$$

Предложеніе.

§ 261. *Квадратъ стороны треугольника, лежащей противъ остраго угла, равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ двухъ сторонъ, безъ удвоеннаго произведенія одной изъ этихъ сторонъ на ея отрѣзокъ, прилежащій къ вершинѣ остраго угла и отсѣкаемый перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ противолежащей вершины на эту сторону.*

Пусть въ треугольникѣ ABC уголъ A острый и BD перпендикулярна къ AC; докажемъ, что

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD.$$

Фиг. 164-я.

Изъ прямоугольнаго треугольника BCD,

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2.$$

Очевидно, что $CD = AD - AC$; возвышая обѣ части въ квадратъ, получимъ

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2AC \times AD.$$

Вставимъ въ (1) равенство, вмѣсто $\overline{BD}^2$ и $\overline{CD}^2$, имъ равныя, получимъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AD.$$

Примѣчаніе. По даннымъ въ числахъ тремъ сторонамъ треугольника можно узнать: къ какому роду принадлежитъ треугольникъ относительно угловъ, т. е. будетъ ли онъ прямоугольный, тупоугольный или остроугольный. Для этого надобно составить квадраты всѣхъ сторонъ: 1) если большій изъ нихъ равенъ суммѣ прочихъ, то треугольникъ прямоугольный (§ 259); 2) если онъ превосходитъ сумму прочихъ, то треугольникъ тупоугольный (§ 260); 3) если жъ онъ меньше суммы прочихъ, то треугольникъ остроугольный (§ 261).

4. Пересѣкающія хорды окружности раздѣляютъ одна другую на части обратно пропорціональныя. — Касательная къ окружности есть средняя пропорціональная между сѣкущей, проведенной изъ одной съ нею точки, и внѣшнимъ отрѣзкомъ. — Сѣкущія, исходящія изъ одной точки, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ. — Свойство перпендикуляра, проведеннаго изъ точки окружности на діаметръ.

Предложеніе.

§ 262. *Если хорды окружности пересѣкаются, то произведеніе отрѣзковъ одной хорды равно произведенію отрѣзковъ другой хорды.*

Разсмотримъ хорды AB и CD, пересѣкающіяся въ точкѣ F; надо доказать, что $FA \times FB = FC \times FD$.

Фиг. 165-я.

Проведя хорды BC и AD, получимъ подобные треугольники ADF и BCF; въ самомъ дѣлѣ, углы A и C равны между собою, какъ вписанные въ одномъ сегментѣ (§ 166); по той же причинѣ $\angle D = \angle B$; слѣд. и третьи углы равны между собою; а при этихъ условіяхъ треугольники подобны. И такъ, сходственныя стороны этихъ треугольниковъ пропорціональны: FA и FC сходственны, ибо лежатъ противъ равныхъ угловъ D и B; FD и FB тоже сходственны, потому что лежатъ противъ равныхъ угловъ A и C; поэтому

$$FA : FC = FD : FB \; \ldots\ldots (1).$$

Уравнявъ произведенія крайнихъ и среднихъ въ этой пропорціи, получимъ

$$FA \times FB = FC \times FD.$$

§ 263. Слѣдствіе. Вообразимъ, что черезъ какую нибудь точку F, лежащую внутри круга, проведено произвольное число хордъ AB, CD и т. д. На основаніи предъидущаго предложенія, произведенія отрѣзковъ каждой хорды будутъ равны между собою; поэтому произведеніе $FA \times FB$ есть постоянная величина, не смотря на то, что для разныхъ хордъ множители FA и FB будутъ измѣняться. Чтобы произведеніе $FA \times FB$ съ измѣненіемъ множителей оставалось постояннымъ, безъ измѣненія, необходимо, чтобы съ *увеличеніемъ* или *уменьшеніемъ* одного множителя въ нѣсколько разъ, во столько же разъ другой множитель *уменьшался* или *увеличивался*. Въ этомъ смыслѣ говорятъ, что

отрѣзки пересѣкающихся хордъ обратно пропорціональны, *) что выражается пропорціею

$$FA : FC = FD : FB \ldots . (1),$$

выведенною въ предъидущемъ §; крайніе члены FA и FB суть отрѣзки одной хорды, а средніе члены FC и FD суть отрѣзки другой хорды.

Предложеніе.

§ 264. *Если черезъ точку, взятую внѣ круга, провесть касательную и сѣкущую, то касательная будетъ средняя пропорціональная между всею сѣкущею и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ.*

Фиг. 166-я.

Пусть BC касательная къ окружности въ точкѣ C; докажемъ, что $AB : BC = BC : BD$.

Проведя хорды AC и CD, получимъ два подобные треугольника ABC и BCD; потому что уголъ B общій, $\angle A = \angle BCD$, ибо каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги CD; слѣдовательно третьи углы ACB и BDC равны.

Поэтому сходственныя стороны пропорціональны, именно: сторона AB треугольника ABC сходственна съ BC другого треугольника, ибо обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ; сторона BC треугольника ABC сходственна съ BD въ другомъ треугольникѣ, — обѣ лежатъ также противъ равныхъ угловъ A и BCD. И такъ,

$$AB : BC = BC : BD.$$

§ 265. Слѣдствіе. Изъ послѣдней пропорціи имѣемъ $\overline{BC}^2 = AB \times BD$. Значитъ, если черезъ точку, взятую внѣ круга, проведены касательная и сѣкущія, то *произведеніе сѣкущей на соотвѣтствующій ей внѣшній отрѣзокъ будетъ постоянная величина,* не смотря на то, что каждый изъ этихъ множителей будетъ измѣняться.

Предложеніе.

§ 266. *Если изъ какой нибудь точки внѣ окружности провести двѣ сѣкущія, то произведеніе одной сѣкущей на*

*) См. Ариѳметику Ф. Симашко, 1885 г. изд. VIII.

внѣшній ея отрѣзокъ равно произведенію другой сѣкущей на внѣшній отрѣзокъ.

Фиг. 167-я.

Изъ какой нибудь точки A, взятой внѣ круга, проведемъ двѣ сѣкущія AB и AC; внѣшній отрѣзокъ первой будетъ AD, а второй — AF, надобно доказать, что

$$AB \times AD = AC \times AF.$$

Черезъ точку A проведемъ касательную AM; положимъ, что точка M означаетъ точку касанія. На основаніи § 264, получимъ

$$AB \times AD = \overline{AM}^2$$

и

$$AC \times AF = \overline{AM}^2;$$

отсюда

$$AB \times AD = AC \times AF \ldots (1).$$

§ 267. Слѣдствіе. Произведеніе сѣкущей на внѣшній ея отрѣзокъ есть величина постоянная (§ 265); слѣд. въ произведеніи $AB \times AD$ съ *увеличеніемъ* или *уменьшеніемъ* одного множителя въ нѣсколько разъ, во столько же разъ *уменьшается* или *увеличивается* другой множитель; въ этомъ смыслѣ говорятъ, что *сѣкущія къ окружности, проведенныя изъ одной точки, обратно пропорціональны своимъ внѣшнимъ отрѣзкамъ.* Свойство это выражается пропорцією

$$AB : AC = AF : AD,$$

которая получится изъ (1) равенства предъидущаго §, если раздѣлимъ обѣ его части на произведеніе $AD \times AC$. Замѣтимъ, что крайніе члены этой пропорціи суть сѣкущая и ея внѣшній отрѣзокъ, а средніе члены — другая сѣкущая и ея внѣшній отрѣзокъ.

Предложеніе.

§ 268. *Если изъ какой нибудь точки окружности опустить перпендикуляръ на діаметръ и провести хорды изъ этой точки въ концы діаметра, то*

1) *Перпендикуляръ будетъ линіею среднею пропорціональною между отрѣзками діаметра;*

2) *Каждая хорда будетъ линіею среднею пропорціональною между діаметромъ и прилежащимъ къ ней отрѣзкомъ.*

Пусть AB означаетъ діаметръ, а CD перпендикуляръ къ нему, надо доказать, что

Фиг. 168-я.

$AD : CD = CD : BD$, $AB : AC = AC : AD$ и $AB : BC = BC : BD$. Такъ какъ уголъ ACB вписанъ въ полукругѣ, то онъ прямой; и такъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC изъ вершины прямаго угла опущенъ перпендикуляръ на ипотенузу; поэтому, примѣнивъ предложенiе § 255, получимъ вышеприведенныя пропорцiи.

---

5. Прямую раздѣлить на равныя части и на части, пропорцiональныя даннымъ линiямъ. — Раздѣлить прямую въ крайнемъ и среднемъ отношенiи. — Построенiе и употребленiе масштабовъ.

Вопросъ.

§ 269. *Прямую раздѣлить на равныя части.*

Фиг. 169-я.

Пусть требуется прямую AB раздѣлить на 5 равныхъ частей. Черезъ конецъ A данной прямой проведемъ въ произвольномъ направленiи линiю AC, и отложимъ отъ точки A пять произвольныхъ, но равныхъ линiй:

$$AD = DF = FG = GH = HK.$$

Послѣднюю точку K соединимъ съ B, а черезъ остальныя точки H, G, . . . проведемъ параллельныя къ BK: точки пересѣченiя этихъ параллельныхъ съ прямою AB раздѣлятъ послѣднюю на 5 равныхъ частей (§ 232).

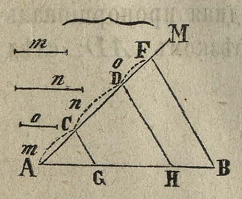
Вопросъ.

§ 270. *Прямую линiю раздѣлить на части, пропорцiональныя даннымъ линiямъ.*

Пусть требуется прямую AB раздѣлить, напримѣръ, на три части, пропорцiональныя даннымъ прямымъ m, n и o: это значитъ, что надобно найти такiя части x, y и z прямой AB, чтобы

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{o}.$$

Фиг. 170-я.



Черезъ точку A, конецъ данной прямой, проведемъ произвольную прямую AM, и по ней отложимъ $AC = m$, $CD = n$, $DF = o$; точку F соединимъ съ B, а черезъ точки D и C проведемъ параллельныя къ BF до пересѣченiя съ AB въ точ-

кахъ H и G: въ этихъ точкахъ данная прямая раздѣлится на части, пропорціональныя даннымъ прямымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи §§ 234, 233 получимъ

$$\frac{AG}{AC}=\frac{GH}{CD}=\frac{HB}{DF},$$

или

$$\frac{AG}{m}=\frac{GH}{n}=\frac{HB}{o}.$$

Положимъ, требуется прямую AB раздѣлить, напримѣръ, на три части, пропорціональныя числамъ 5, 3 и 2. На прямой AF отложимъ AC, равную 5-ти произвольнымъ, но равнымъ линіямъ, CD — равную 3 и DF — двумъ такимъ же линіямъ; точку F соединимъ съ B, и черезъ D и C проведемъ DG и CH параллельно BF; получимъ

Фиг. 171-я.

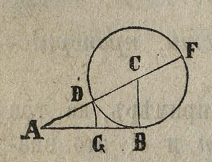
$$\frac{AH}{5}=\frac{HG}{3}=\frac{GB}{2}.$$

Вопросъ.

§ 271. *Раздѣлить прямую въ крайнемъ и среднемъ отношеніи*, т. е. на такія двѣ части, чтобы одна была среднею пропорціональною между всею данною прямою и другою ея частью.

Изъ конца B данной прямой AB возставимъ къ ней перпендикуляръ и отложимъ BC, равное половинѣ AB. Принявъ C за центръ, радіусомъ CB, опишемъ окружность; а черезъ центръ C и другой конецъ A данной прямой проведемъ сѣкущую AF; наконецъ изъ точки A, какъ центра, радіусомъ AD, опишемъ дугу до пересѣченія съ AB въ точкѣ G. Докажемъ, что

Фиг. 172-я.



$$AB:AG=AG:BG.$$

Касательная AB къ окружности есть средняя пропорціональная между сѣкущею AF и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ AD; слѣд. (§ 264)

$$AF:AB=AB:AD;$$

отсюда

$$\frac{AF-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD}.$$

Но AB равна двумъ радiусамъ BC, значитъ, AB равна дiаметру DF; поэтому $AF - AB = AD$ или AG; $AB - AD$ равно $AB - AG$ или BG. Вставивъ эти величины въ предъидущую пропорцiю, получимъ $AB : AG = AG : BG$.

И такъ, прямая AB въ точкѣ G раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношенiи.

Вопросъ.

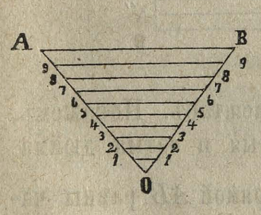
§ 272. *Построить масштабъ.*

Прямая, раздѣленная по возможности на мелкiя части, съ тѣмъ, чтобы точнѣе измѣрить ею линiю чертежа, называется *масштабомъ*.

Способъ, показанный для раздѣленiя прямой на равныя части (§ 269), становится неудобнымъ, когда части дѣленiя весьма мелки; такъ, напримѣръ, еслибъ понадобилось дюймъ раздѣлить на 100 равныхъ частей, то точки дѣленiя были бы такъ близки, что даже черты, означающiя точки, имѣли бы влiянiе на точность чертежа. Для избѣжанiя такаго затрудненiя можно воспользоваться однимъ изъ слѣдующихъ построенiй:

1) Пусть требуется прямую AB раздѣлить на 10 равныхъ частей. Черезъ точку A проведемъ произвольно прямую, отложимъ по ней, отъ точки A, десять произвольныхъ, но равныхъ частей; послѣднюю точку O соединимъ съ B, а черезъ точки 1, 2, 3......9 прямой AO проведемъ параллельныя къ AB. Такъ какъ прямыя, параллельныя боку AB треугольника, отсѣкаютъ треугольники подобные треугольнику AOB, то

Фиг. 173-я.



прямая $(1...1) = \frac{1}{10} AB$,

« $(2...2) = \frac{2}{10} AB$,

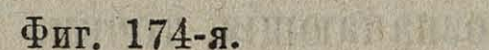
« $(3...3) = \frac{3}{10} AB$,

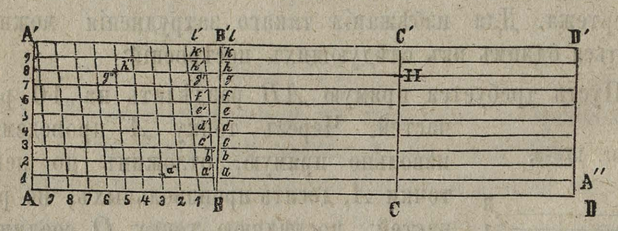
....

« $(9...9) = \frac{9}{10} AB$.

2) *Поперечный масштабъ.* Пусть требуется прямую AB, длиною, напримѣръ, въ 1 дюймъ, раздѣлить на 100 равныхъ частей.

Раздѣлимъ AB на 10 равныхъ частей обыкновеннымъ способомъ (§ 269); части дѣленія означимъ цифрами 1, 2, 3 и т. д.; такимъ образомъ линіи $B1$, $B2$, $B3$,... $B9$ выразятъ послѣдовательно $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$,...$\frac{9}{10}$ дюйма. Десятую часть линіи AB (дюйма), напримѣръ $A9$ раздѣлимъ на 10 равныхъ частей, чтобы получить $\frac{1}{100}$ линіи AB; для этого воспользуемся предъидущимъ способомъ. Проведемъ AA' перпендикулярно къ AB, отложимъ по немъ отъ точки A десять произвольныхъ, но равныхъ частей, которыя означимъ цифрами 1, 2, 3,... 9; точку A' соединимъ съ концомъ 9 раздѣляемой линіи $A9$, а черезъ точки отложенія 1, 2, 3,...9 по линіи AA' проведемъ параллельныя къ AB; наконецъ черезъ остальныя точки дѣленія прямой AB и черезъ конецъ B проведемъ параллельныя къ прямой $A'9$. Отложивъ $BC = CD = ... = AB$, изъ точекъ C, D,... возставимъ перпендикуляры


Фиг. 174-я.



CC', DD',... Такъ получимъ поперечный масштабъ. Покажемъ, какъ помощію его получаются дюймы, десятыя и сотыя дюйма.

Понятно, что $AB = A'B'$, и всѣ части прямой AB равны частямъ прямой $A'B'$, какъ параллельныя между параллельными; слѣдовательно $B'l'$, составляетъ десятую часть AB. На основаніи предъидущаго способа дѣленія прямой (1-е), имѣемъ:

$$aa' = 0,1\ B'l', \text{ слѣд. } aa' = 0,01AB,$$
$$bb' = 0,2\ B'l', \text{ слѣд. } bb' = 0,02AB,$$
$$cc' = 0,3\ B'l', \text{ слѣд. } cc' = 0,03AB,$$
и т. д. и т. д.
$$kk' = 0,9\ B'l', \text{ слѣд. } kk' = 0,09AB.$$

На фиг. 173 прямая AB есть дюймъ въ настоящую величину; поэтому aa' есть 0,01 часть дюйма, $bb' = 0,02$ д., и т. д.;

$B1 = 0{,}1$ д., $B2 = 0{,}2$ д.,...$B9 = 0{,}9$ дюйма. Прямая $A''a'' = A''a + a''a' + aa'$ или $A''a'' = 2 + 0{,}3 + 0{,}01$; слѣд. $A''a'' = 2{,}31$ дюйм. Линія $gg'' = g''g' + g'g$, или $gg'' = 0{,}58$ дюйм. Линія $Hh'' = Hh + h''h' + h'h$, или $Hh'' = 1{,}48$.

Поэтому, чтобы измѣрить линію чертежа въ дюймахъ и его частяхъ съ точностью до сотой части дюйма, растворяютъ циркуль на длину измѣряемой линіи и отыскиваютъ на масштабѣ такую изъ линій параллельныхъ къ AD, чтобы ножки циркуля совпали съ пересѣченіями на масштабѣ; напримѣръ, если ножки циркуля придутся въ точкахъ H и h'', то опредѣляемая прямая $Hh'' = 1{,}48$ дюйма.

Обратно, если требуется линію, длинною, напримѣръ, 2,31 дюйма, нанесть на чертежъ, то ставятъ одну ножку циркуля по линіи DD', отвѣчающей 2-мъ дюймамъ, на той горизонтальной, которая проходитъ черезъ дѣленіе 1, означающее 0,01, и растворяютъ циркуль, пока другая ножка не придется противъ поперечной, означенной цифрою 3, означающею десятыя; получимъ $A''a'' = 2{,}31$ дюйма.

По весьма важному приложенію масштаба къ черченію, учащіеся должны твердо усвоить указанные здѣсь пріемы опредѣленія въ дюймахъ и его частяхъ длины линіи, а также отложенія линіи, когда она задана въ дюймахъ и его частяхъ.

Дробный масштабъ. Масштабъ употребляется преимущественно для нанесенія на бумагу линій, уменьшенныхъ въ извѣстное число разъ. Объяснимъ примѣромъ. Если настоящую величину дюйма примемъ, напримѣръ, за 100 сажень, то 0,01 часть дюйма надо принять за 1 сажень, 0,02 дюйма—за 2 сажени и т. д.; поэтому, если бъ потребовалось линію мѣстности, длиною въ 195 сажень нанести на бумагу, то взяли бы по масштабу 1,95 дюйма, какъ показано было выше. Понятно, что принявъ для масштаба 1 дюймъ за 100 саженъ и перенося измѣренныя линіи на бумагу въ этомъ масштабѣ, мы уменьшимъ всѣ линіи во столько разъ, во сколько 100 саженъ болѣе 1 дюйма, т. е. въ 8400 разъ. Дробь $\frac{1}{8400}$, показывающая отношеніе линіи начерченной на бумагѣ къ дѣйствительной длинѣ линіи, называется *дробнымъ масштабомъ*.

6. Построить: четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ, линіямъ, среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми и третью пропорціональную къ двумъ прямымъ.—По данной сторонѣ построить полигонъ подобный данному.

Вопросъ.

§ 273. *Построить четвертую пропорціональную къ даннымъ тремъ прямымъ.*

Пусть a, b и c означаютъ три данныя прямыя; требуется построить такую прямую, чтобы отношеніе линіи a къ b было равно отношенію линіи c къ искомой.

Фиг. 175-я.

Проведемъ двѣ прямыя AB и AC подъ произвольнымъ угломъ; отъ вершины A отложимъ $AD = a$, $AF = c$, а отъ точки D отложимъ $DG = b$; соединивъ точки D и F, проведемъ черезъ G прямую параллельно DF, до пересѣченія съ AB въ точкѣ H.

На основаніи свойства хорды DF, параллельной боку GH треугольника AGH (§ 234), получимъ $AD : DG = AF : FH$, или $a : b = c : FH$. И такъ FH есть искомая линія.

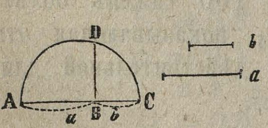
Вопросъ.

§ 274. *Построить среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми.*

Пусть a и b — данныя прямыя; надобно построить такую прямую, чтобы отношеніе линіи a къ искомой было равно отношенію этой искомой къ прямой b.

1) На неопредѣленной прямой отложимъ $AB = a$ и $BC = b$; раздѣливъ AC пополамъ, опишемъ полуокружность, изъ середины AC, какъ центра, радіусомъ, равнымъ $\frac{1}{2} AC$; а изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BD къ AC до пересѣченія съ полуокружностью. Извѣстно, что перпендикуляръ, опущенный изъ точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками діаметра (§ 268); слѣдовательно

Фиг. 176-я.



$$AB : BD = BD : BC,$$

или

$$a : BD = BD : b.$$

И такъ, BD есть искомая линія.

2) Рѣшеніе этого вопроса можно основывать и на томъ свойствѣ хорды, что она есть средняя пропорціональная между діаметромъ, проведеннымъ черезъ одинъ изъ ея концовъ, и отрѣзкомъ этого діаметра (§ 268). Вслѣдствіе этого искомая линія x должна быть хордою, и если $a > b$, то a будетъ діаметромъ, а b — его отрѣзкомъ. И такъ, отложимъ $AB = a$. $AC = b$; изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CD къ линіи AB до пересѣченія съ окружностью, описанною на AB, какъ на діаметрѣ; прямая AD будетъ искомая; дѣйствительно

Фиг. 177-я.

$$AB : AD = AD : AC, \text{ или } a : x = x : b.$$

3) Рѣшеніе того же вопроса можно основать на свойствѣ касательной, что она средняя пропорціональная между сѣкущею и внѣшнимъ ея отрѣзкомъ. Вслѣдствіе этого, отложимъ $AB = a$, $AC = b$ (фиг. 178) и опишемъ какую нибудь окружность, которая прошла бы черезъ двѣ точки B и C; а изъ точки A проведемъ касательную AD къ окружности; получимъ

$$AB : AD = AD : AC \text{ или } a : AD = AD : b.$$

Примѣчаніе. Черезъ двѣ точки B и C можно провесть множество окружностей, но касательныя, проведенныя къ нимъ черезъ точку A, будутъ равны между собою (§ 264); слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ будетъ окружность, описанная изъ центра A радіусомъ AD.

Фиг. 178-я.

Вопросъ.

§ 275. ***Построить третью пропорціональную къ двумъ даннымъ прямымъ.***

Пусть a и b данныя прямыя; надобно построить такую прямую, чтобы отношеніе a къ b было равно отношенію b къ искомой

линіи; очевидно, что искомая линія найдется какъ четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ: a, b и b (§ 273).

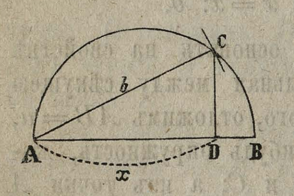
Для рѣшенія этого вопроса можно употребить еще одно изъ слѣдующихъ построеній.

1) На произвольной прямой отложимъ $AB = a$, возставимъ перпендикуляръ $BC = b$; соединивъ точки A и C, возставимъ перпендикуляръ CD къ прямой AC до пересѣченія съ продолженною AB. По свойству перпендикуляра BC, опущеннаго изъ вершины прямоугольнаго треугольника на ипотенузу AD, получимъ $a : b = b : BD$; слѣдовательно искомая третья пропорціональная равна BD.

Фиг. 179-я.

2) Пусть $a > b$. Отложимъ $AB = a$ и на прямой AB, какъ діаметрѣ, опишемъ окружность; изъ точки A, какъ центра, радіусомъ равнымъ b, опишемъ дугу; а изъ точки пересѣченія C опустимъ перпендикуляръ CD на AB; получимъ $AB : AC = AC : AD$, или $a : b = b : AD$; слѣдовательно AD есть искомая линія.

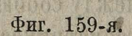
Фиг. 180-я.

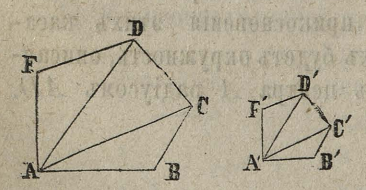


Вопросъ.

§ 276. *На данной сторонѣ построить многоугольникъ, подобный данному.*

Пусть требуется построить на прямой $A'B'$ многоугольникъ, подобный многоугольнику $ABCDF$. Изъ вершины A проведемъ діагонали AC, AD; на прямой $A'B'$, при точкѣ A', построимъ уголъ $B'A'C' = BAC$, а при точкѣ B' — уголъ $A'B'C' = \angle ABC$, получимъ треугольникъ $A'B'C'$, подобный ABC (§ 242). Точно также на прямой $A'C'$ построимъ треугольникъ $A'C'D'$, подобный ACD, и на прямой $A'D'$, — треугольникъ $A'D'F'$, подобный ADF. Многоугольникъ $A'B'C'D'F'$ подобенъ $ABCDF$, потому что оба многоугольника разбиваются изъ вершинъ равныхъ угловъ A и A' на треугольники, подобные и одинаково расположенные (§ 252).


Фиг. 159-я.



ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Измѣреніе и сравненіе площадей многоугольниковъ.

7. Площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся какъ высоты. — Площади прямоугольниковъ относятся какъ произведенія основаній на соотвѣтствующія высоты.— О мѣрѣ площадей. — Площадь прямоугольника.

§ 277. *Площадью* называется величина опредѣленной части плоскости. Подобно тому какъ длина прямой линіи есть величина опредѣленной части безконечной прямой линіи, такъ площадь есть величина опредѣленной части безконечной плоскости; часть эта можетъ быть ограничена прямыми линіями — многоугольникъ, окружностью — кругъ, дугою окружности и прямыми линіями — круговой секторъ, круговой сегментъ и вообще какими нибудь кривыми линіями.

Измѣрить площадь значитъ найти ея отношеніе къ единицѣ. За единицу для измѣренія площадей принимаютъ квадратъ, сторона котораго равна единицѣ.

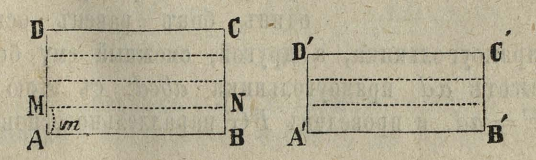
Предложеніе.

§ 278. *Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны ихъ высотамъ.*

Положимъ, что въ прямоугольникахъ $ABCD$ и $A'B'C'D'$ основанія ихъ равны, $AB = A'B'$; надо доказать, что

$$ABCD : A'B'C'D' = AD : A'D'.$$

Фиг. 181-я.



1) Положимъ, что высоты AD и $A'D'$ соизмѣримы и пусть общая ихъ мѣра m содержится въ AD — 4 раза и въ $A'D'$ — 3 раза; значитъ

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{4}{3}.$$

Черезъ точки дѣленія проведемъ параллельныя къ основаніямъ AB и $A'B'$; такимъ образомъ прямоугольникъ $ABCD$ разобьется на четыре равныхъ прямоугольниковъ, а $A'B'C'D'$ на три также равныхъ между собою и равныхъ первымъ прямоугольникамъ (§ 131). По этому можемъ сказать, что прямоугольникъ $ABNM$ есть общая мѣра для прямоугольниковъ $ABCD$ и $A'B'C'D'$, которая въ первомъ содержится 4 раза, а во второмъ прямоугольникѣ 3 раза; слѣдовательно

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{4}{3}.$$

И такъ $ABCD : A'B'C'D' = AD : A'D'$.

2) Пусть высоты AD и $A'D'$ несоизмѣримы.

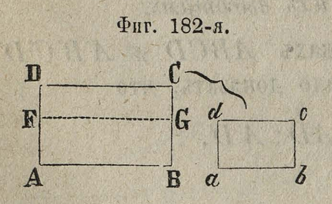
Доказательство такое же, какъ въ § 220, 2-е.

§ 279. Такъ какъ за основаніе прямоугольника принимается какая нибудь его сторона, а высотою будетъ смежная ей сторона, то можно сказать, что *площади прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны ихъ основаніямъ.*

Предложеніе.

§ 280. *Площади всякихъ двухъ прямоугольниковъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты*, т. е. произведеніямъ отвлеченныхъ чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренія основаній и высотъ какою нибудь единицею.

Фиг. 182-я.



Пусть будутъ даны $ABCD$ и $abcd$, два прямоугольника; надо доказать, что $ABCD : abcd = AB \cdot AD : ab \cdot ad$. Построимъ прямоугольникъ, котораго одинъ бокъ равенъ основанію AB перваго прямоугольника, а другой, смежный ему бокъ, былъ бы равенъ высотѣ ad прямоугольника $abcd$; съ этою цѣлью отложимъ $AF = ad$, и проведемъ FG параллельно основанію AB, по-

лучимъ прямоугольникъ $ABGF$. Прямоугольники AC и AG имѣютъ равныя основанія; слѣдовательно они пропорціональны ихъ высотамъ AD и AF; а прямоугольники AG и ac имѣютъ равныя высоты, слѣдовательно они пропорціональны ихъ основаніямъ AB и ab. И такъ

$$\frac{AC}{AG}=\frac{AD}{AF},$$
$$\frac{AG}{ac}=\frac{AB}{ab};$$

перемножимъ равныя на равныя, сокративъ AG и вставивъ ad, вмѣсто AF, получимъ

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AD\times AB}{ad\times ab}.$$

Предложеніе.

§ 281. *Площадь прямоугольника измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту.*

Фиг. 183-я.

Пусть требуется измѣрить прямоугольникъ $ABCD$; значитъ надо найти отношеніе прямоугольника AC къ квадрату ac, котораго бокъ равенъ какой нибудь линейной единицѣ. Такъ какъ квадратъ есть въ то же время прямоугольникъ, то, на основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$\frac{AC}{ac}=\frac{AB\times AD}{ab\times ab},\ \text{или}\ \frac{AC}{ac}=\frac{AB}{ab}\times\frac{AD}{ab}.$$

При измѣреніи площадей, бокъ квадрата, принятаго за единицу, всегда равенъ единицѣ; то предъидущее выраженіе можно такъ изобразить

$$\frac{AC}{1\ \text{площ.}}=\frac{AB}{1\ \text{лин.}}\times\frac{AD}{1\ \text{лин.}}.$$

Значитъ, прямоугольникъ AC содержитъ столько квадратныхъ единицъ, сколько заключается единицъ въ произведеніи чиселъ,

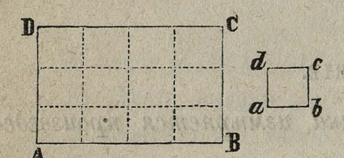
происшедшихъ отъ измѣренія основанія AB и высоты AD прямоугольника. Для краткости пишутъ

$$AC = AB \times AD,$$

и читаютъ: площадь прямоугольника равна или измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту. Причемъ надо помнить, что въ предъидущемъ равенствѣ подъ AC, AB и AD подразумѣваются числа, какъ выше сказано; иначе было бы нелѣпо умножать двѣ прямыя, одну на другую.

§ 282. Если бокъ квадрата $abcd$, принятаго для измѣренія площади прямоугольника $ABCD$, укладывается цѣлое число разъ въ основаніи и высотѣ, то измѣреніе площади становится очевиднымъ, независимо отъ предъидущаго предложенія. Пусть напримѣръ, бокъ ab въ основаніи AB уложился 4 раза, а въ высотѣ — 3 раза; проведя черезъ точки дѣленія прямыя, параллельныя основанію и высотѣ, разобьемъ прямоугольникъ AC на квадраты, равные квадрату ac, и очевидно, что число квадратовъ, содержащихся въ прямоугольникѣ AC, равно произведенію 4×3.

Фиг. 184-я.



Если отъ измѣренія основанія и высоты прямоугольника получатся дробныя числа, то и площадь прямоугольника выразится въ частяхъ квадратной единицы; напримѣръ, если основаніе прямоугольника равно $2^1/_4$ дюйм., а высота $1^1/_2$ дюйма, то площадь прямоугольника будетъ равна $(2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2})$ квадратнымъ дюймамъ, или $3\frac{3}{8}$ кв. дюйма.

Предложеніе.

§ 283. *Площадь квадрата измѣряется второю степенью его бока.*

Дѣйствительно, квадратъ есть прямоугольникъ, въ которомъ основаніе равно высотѣ; поэтому, если бокъ квадрата, принятый за 1-цу, содержится a разъ въ бокѣ измѣряемаго квадрата, то площадь этого послѣдняго равна $a \times a$ или a^2.

§ 284. *Примѣчаніе.* На этомъ основаніи получимъ слѣдующія отношенія квадратныхъ мѣръ:

квадратная миля	=	7^2,	или	49	кв. верстамъ,
квадратная верста	=	500^2,	„	250000	кв. саженямъ,
квадратная сажень	=	7^2,	„	49	кв. футамъ,
квадратный футъ	=	12^2,	„	144	кв. дюймамъ,
квадратный дюймъ	=	10^2,	„	100	кв. линіямъ,
квадратная сажень	=	3^2,	„	9	кв. аршинамъ,
квадратный арш.	=	16^2,	„	526	кв. вершкамъ.

Кромѣ этихъ мѣръ у насъ употребляется еще *десятина*; это прямоугольникъ, котораго основаніе 60 саженъ, а высота 40, или — основаніе 80 саженъ, а высота 30; въ обоихъ случаяхъ площадь десятины равна 2400 квадратнымъ саженямъ.

§ 285. Говоря о десятинѣ, можно замѣтить, что прямоугольники, одинъ — съ основаніемъ въ 60 и высотою въ 40 саженъ, а другой — съ основаніемъ въ 80 и высотою въ 30 саженъ не могутъ быть совмѣщены; между тѣмъ площади ихъ равны, ибо обѣ содержатъ одинаковое число единицъ или мѣръ, 2400 кв. саженъ.

Вообще протяженія могутъ, различаясь по виду, содержать одинаковое число квадратныхъ мѣръ: такія протяженія называются *равномѣрными;* равными же будемъ называть, по прежнему, протяженія совмѣщающіяся. Разумѣется, что равныя протяженія необходимо равномѣрны; обратное же не всегда бываетъ вѣрно.

---

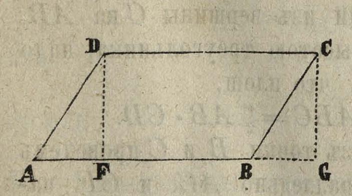
8. Площади параллелограмма и треугольника. — Площади трапеціи и описаннаго около круга многоугольника.

Предложеніе.

§ 286. *Площадь параллелограмма измѣряется произведеніемъ его основанія на высоту.*

Пусть $ABCD$ параллелограммъ, за основаніе его примемъ бокъ AB, за высоту перпендикуляръ DF къ основанію AB; докажемъ, что площадь $ABCD = AB \times DF$. Проведя CG перпендикулярно къ AB, получимъ прямоугольникъ $CDFG$ (§ 128), равномѣрный съ даннымъ параллелограммомъ. Дѣй-

Фиг. 185-я.



ствительно, въ треугольн. ADF и BCG, $AD=BC$, $DF=CG$ (§ 122), $\angle ADF=\angle BCG$ (§ 78); слѣд. треуг. $ADF=$ треуг. BCG; а придавъ къ этимъ равнымъ по площади $BCDF$, получимъ треуг. $ADF+$ площ. $BCDF=$ треуг. $BCG+$ площ. $BCDF$, или паралл. $ABCD=$ прямоуг. $CDFG$.

На основанiи предъидущаго параграфа,

прямоуг. $CDFG=CD\times DF$;
слѣд. паралл. $ABCD=CD\times DF$,
или паралл. $ABCD=AB\times DF$.

§ 287. Слѣдствiе I. *Площади двухъ параллелограммовъ пропорцiональны произведенiямъ ихъ основанiй на высоты.*

Пусть Q и q означаютъ площади двухъ параллелограммовъ, B и b — ихъ основанiя, H и h — высоты. Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} Q&=BH,\\ q&=bh; \end{aligned}\right\} \text{ отсюда } \frac{Q}{q}=\frac{BH}{bh}.$$

§ 288. Слѣдствiе II. Если въ предъидущей пропорцiи положимъ $B=b$, то получимъ $Q:q=H:h$, т. е. *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя основанiя, пропорцiональны высотамъ.*

Положимъ въ той же пропорцiи $H=h$, получимъ $Q:q=B:b$, т. е. *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорцiональны основанiямъ.*

§ 289. Слѣдствiе III. Если одновременно $B=b$, $H=h$, то и $Q=q$, т. е. *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя основанiя и высоты, равномѣрны.*

Предложенiе.

§ 290. *Площадь треугольника измѣряется половиною произведенiя его основанiя на высоту.*

Пусть въ треугольникѣ ABC бокъ AB принятъ за основанiе, а слѣд. перпендикуляръ CD, опущенный изъ вершины C на AB, будетъ высотою треугольника; надо доказать, что площ.

Фиг. 186-я.

$$ABC=\tfrac{1}{2}\,AB\cdot CD.$$

Черезъ точки B и C проведемъ BF параллельно AC, и CF па-

раллельно AB; получимъ параллелограммъ $ABFC$ (§ 119), котораго площадь равна $AB \times CD$ (§ 286); но площадь треугольника ABC составляетъ половину площади параллелограмма (§ 123); поэтому

$$\text{площ. } ABC = \tfrac{1}{2} AB \cdot CD.$$

§ 291. Слѣдствіе I. *Площади двухъ треугольниковъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Пусть T и t означаютъ площади треугольниковъ, B и b — ихъ основанія, а H и h — высоты. На основаніи послѣдняго предложенія, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{BH}{2} \\ t = \dfrac{bh}{2} \end{array}\right\} \text{ отсюда } \frac{T}{t} = \frac{BH}{bh}.$$

§ 292. Слѣдствіе II. *Площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны ихъ высотамъ, а при равныхъ высотахъ пропорціональны основаніямъ.*

И дѣйствительно, если въ пропорціи предъидущаго параграфа положимъ $B = b$, то получимъ $T : t = H : h$; а принявъ $H = h$, получимъ $T : t = B : b$.

§ 293. Слѣдствіе III. Если одновременно $B = b$ и $H = h$, то и $T = t$; значитъ, *площади треугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія и равныя высоты, равномѣрны.*

Вопросъ.

* *По извѣстнымъ тремъ сторонамъ треугольника, найти его площадь* (фиг. 186).

Положимъ, что въ треугольникѣ ABC извѣстны стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Высота CD треугольника неизвѣстна, назовемъ ее буквою h. На основаніи § 261, получимъ

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\, AB \cdot AD$$

или

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AD;$$

отсюда

$$AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Изъ прямоугольнаго треугольника ACD получимъ (§ 257)

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 \text{ или } h^2 = b^2 - \overline{AD}^2.$$

Вставимъ, вмѣсто AD, равную ей величину, получимъ

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}, \text{ отсюда } h^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

Числитель послѣдняго выраженія можно принять за разность квадратовъ, потому что $4^2b^2c^2 = (2bc)^2$; а извѣстно, что разность квадратовъ двухъ количествъ равна суммѣ этихъ количествъ, умноженной на ихъ разность; слѣд.

$$\begin{aligned} 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2), \\ &= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)\}, \\ &= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}, \\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b); \end{aligned}$$

поэтому
$$h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4c^2}.$$

Положимъ, для краткости,

$$a + b + c = 2p.$$

Вычтя послѣдовательно изъ частей этого равенства сперва $2a$, потомъ $2b$, наконецъ $2c$, получимъ

$$\begin{aligned} b + c - a &= 2(p - a), \\ a + c - b &= 2(p - b), \\ a + b - c &= 2(p - c); \end{aligned}$$

слѣд.
$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}$$

и
$$h = 2\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

Площадь треугольника найдется, когда половину высоты h умножимъ на основаніе c, получимъ

$$\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Примѣчаніе. При опредѣленіи отрѣзка AD, мы полагали, что уголъ A острый; еслибъ уголъ A былъ тупой, то для опредѣленія отрѣзка AD, надо взять въ основаніе § 260.

Предложеніе.

294. *Площадь трапеціи измѣряется произведеніемъ полусуммы параллельныхъ ея основаній на высоту.*

Пусть $ABCD$ трапеція, AB и CD ея параллельныя основанія, а $DF = BG$ — высота.

Фиг. 187-я.

Проведя діагональ BD, мы разобьемъ трапецію на два треугольника: въ одномъ изъ нихъ — площадь $ABD = \frac{1}{2} AB \times DF$, въ другомъ — площадь $BCD = \frac{1}{2} CD \times BG$ или $\frac{1}{2} CD \times DF$; потому что разстояніе между параллельными повсюду равны; и такъ площадь $ABCD = \frac{1}{2} AB \times DF + \frac{1}{2} CD \times DF$; а отдѣливъ DF общимъ множителемъ, имѣемъ площадь $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \times DF$.

§ 295. Слѣдствіе. *Площадь трапеціи равна произведенію ея высоты на прямую, соединяющую середины не параллельныхъ боковъ.*

Если черезъ середину M бока AD проведемъ хорду MN параллельно основаніямъ трапеціи, то прямая MN будетъ равна полусуммѣ основаній (§ 117); слѣдовательно

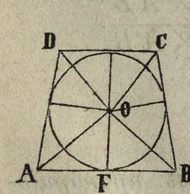
площадь $ABCD = MN \times DF$.

Предложеніе.

§ 296. *Площадь многоугольника, описаннаго около круга, измѣряется половиною произведенія изъ его периметра на радіусъ этого круга.*

Требуется найти площадь многоугольника $ABCD$, описаннаго около круга. Соединивъ центръ круга съ вершинами многоугольника, найдемъ, что площадь многоугольника $ABCD$ равна суммѣ площадей треугольниковъ $ABO + BCO + CDO + ADO$. За основанія этихъ треугольниковъ примемъ стороны даннаго многоугольника AB, BC,....; высота у нихъ будетъ общая—радіусъ OF круга, потому что перпендикуляры, опущенные изъ центра на касательныя, проходятъ черезъ точки касанія. И такъ площадь

Фиг. 188-я.



$$ABCD = AB \cdot \frac{FO}{2} + BC \cdot \frac{FO}{2} + CD \cdot \frac{FO}{2} + AD \cdot \frac{FO}{2},$$

или $ABCD = (AB + BC + CD + AD) \cdot \frac{FO}{2}$,

гдѣ сумма боковъ $AB + BC + CD + AD$ есть периметръ многоугольника, описаннаго около круга; слѣд. предложеніе доказано.

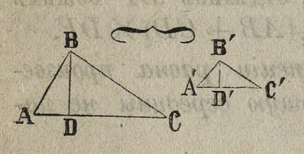
---

9. Треугольники, имѣющіе по равному углу, относятся, какъ произведенія изъ сторонъ, заключающихъ эти углы.—Подобные треугольники и подобные многоугольники относятся какъ квадраты сходственныхъ боковъ.

Предложеніе.

§ 297. *Площади треугольниковъ, имѣющихъ по равному углу, пропорціональны произведеніямъ сторонъ, заключающихъ эти углы.*

Фиг. 157-я.



Положимъ, что уголъ $A' = \angle A$. Площади треугольниковъ пропорціональны произведеніямъ изъ ихъ основаній на высоты (§ 291); слѣдовательно

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \times \frac{BD}{B'D'}.$$

Высоты BD и $B'D'$ треугольниковъ ABC и $A'B'C'$ отсѣкаютъ подобные треугольники ABD и $A'B'D'$; потому что уголъ $A = \angle A'$ и прямой уголъ $ADB = \angle A'D'B'$; слѣдовательно сходственныя стороны пропорціональны:

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Вставимъ въ первое равенство, вмѣсто отношенія $\frac{BD}{B'D'}$, ему равное $\frac{AB}{A'B'}$, получимъ

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \times \frac{AB}{A'B'}, \text{ или } \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC \times AB}{A'C' \times A'B'}.$$

Предложеніе.

§ 298. *Площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ своихъ сходственныхъ сторонъ.*

Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны; положимъ, что уголъ $A = \angle A'$. На основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \times \frac{AB}{A'B'};$$

а вслѣдствіе подобія треугольниковъ ABC и $A'B'C'$, сходственныя стороны пропорціональны:

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Вставивъ въ первое равенство, вмѣсто отношенія $\frac{AC}{A'C'}$, ему равное $\frac{AB}{A'B'}$, и перемноживъ дроби, получимъ

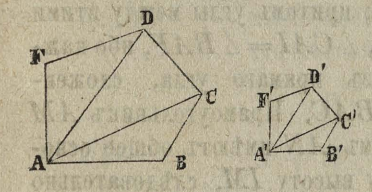
$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Предложеніе.

§ 299. *Площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ своихъ сходственныхъ сторонъ.*

Пусть многоугольники $ABCDF$ и $A'B'C'D'F'$ подобны. Изъ вершинъ равныхъ угловъ A и A' проведемъ діагонали во всѣ прочія вершины; получимъ подобные треугольники, и, вслѣдствіе предъидущаго предложенія, будемъ имѣть

Фиг. 159-я.



$$ABC : A'B'C' = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2,$$
$$ACD : A'C'D' = \overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2,$$
$$ADF : A'D'F' = \overline{DF}^2 : \overline{D'F'}^2.$$

Стороны подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны; значитъ, $BC : B'C' = CD : C'D' = DF : D'F'$; а возвысивъ въ квадратъ всѣ члены этихъ пропорцій, найдемъ, что вторыя отношенія вышеприведенныхъ равенствъ равны между собою; и такъ

$$ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADF : A'D'F'.$$

Примѣнивъ къ этому ряду равныхъ отношеній извѣстное свойство, что сумма предъидущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ и проч.,

получимъ $$\frac{ABC+ACD+ADF}{A'B'C'+A'C'D'+A'D'F'}=\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

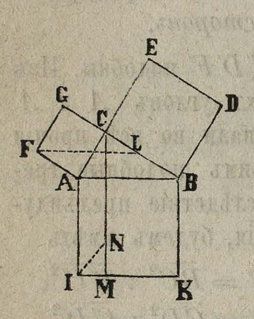
10. Квадратъ, построенный на ипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ. Многоугольникъ, построенный на ипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ многоугольниковъ ему подобныхъ, построенныхъ на катетахъ, если ипотенуза и катеты представляютъ сходственные бока этихъ многоугольниковъ.

Предложение.

§ 300. *Квадратъ, построенный на ипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ* *).

Построимъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника ABC (уголъ C прямой) квадраты $ABKI$, $BCED$ и $ACGF$, и докажемъ, что первый квадратъ равномѣренъ суммѣ остальныхъ двухъ.

Фиг. 189-я.



Проведемъ CM перпендикулярно къ ипотенузѣ AB, IN параллельно катету AC, и FL параллельно ипотенузѣ AB: получимъ два равные параллелограмма $ACNI$ и $ABLF$ (§ 125). Въ самомъ дѣлѣ, двѣ стороны: $AI = AB$, $AC = AF$, какъ стороны квадратовъ; притомъ углы между этими сторонами равны, $\angle CAI = \angle BAF$, ибо каждый состоитъ изъ прямаго угла, сложеннаго съ угломъ BAC. Прямоугольникъ AM и параллелограммъ AN имѣютъ общее основаніе AI и одну высоту IM, слѣдовательно они равномѣрны (§ 289); по той же причинѣ, квадратъ AG равномѣренъ параллелограмму BF; а какъ эти параллелограммы равны, то прямоугольникъ AM равномѣренъ квадрату AG.

Точно также докажемъ, что прямоугольникъ BM равномѣренъ квадрату BE; а какъ сумма прямоугольниковъ AM и BM составляетъ квадратъ AK, то квадратъ AK равномѣренъ суммѣ квадратовъ AG и BE.

§ 301. *Примѣчаніе.* Извѣстно, что площадь квадрата равна второй степени или квадрату его бока; слѣдовательно, если стороны прямоугольнаго треугольника измѣрены, то квадратъ числа, происшедшаго отъ измѣренія ипотенузы, равенъ суммѣ квадратовъ чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренія катетовъ. Такимъ образомъ вновь доказано предложеніе § 256. Предложенія, опредѣляющія квадраты сторонъ, лежащихъ противъ острыхъ и ту-

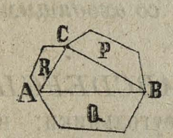
*) Это свойство открыто греческимъ геометромъ Пиѳагоромъ: ему же приписываютъ открытіе несоизмѣримости діагонали съ бокомъ квадрата. Пиѳагоръ жилъ около 580 г. до Р. Х.

ныхъ угловъ треугольника, могутъ быть доказаны вновь, принимая квадраты чиселъ, служащихъ мѣрою сторонамъ, за квадраты построенные на этихъ сторонахъ, а произведенія чиселъ за прямоугольники, въ которыхъ основаніе и высота измѣряются этими числами.

Предложеніе.

§ 302. *Площадь многоугольника, построеннаго на ипотенузѣ, равномѣрна суммѣ площадей многоугольниковъ, ему подобныхъ, построенныхъ на катетахъ, если ипотенуза и катеты представляютъ сходственные бока многоугольниковъ.*

Фиг. 190-я.



Пусть ABC прямоугольный треугольникъ, а многоугольники Q, P и R подобныя между собою, причемъ стороны AB, BC и AC сходственныя; уголъ C полагается прямымъ.

Извѣстно (§ 299), что площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ; слѣдовательно

$$P : R = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2;$$

отсюда $$P + R : R = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2,$$

притомъ (§ 299) $$Q : R = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

Три члена одной пропорціи равны тремъ членамъ другой, потому что квадратъ ипотенузы $\overline{AB}^2$ равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$; слѣдовательно остальные члены также равны, т. е.

$$Q = P + R.$$

Вопросъ.

Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую площадь и одно основаніе.

При рѣшеніи надо имѣть въ виду § 293-й.

---

11. Даннаго многоугольника найти площадь; превратить многоугольникъ въ другой, ему равномѣрный, но имѣющій меньше боковъ.—Построить квадратъ, равномѣрный данному прямоугольнику или данному треугольнику.—Построить треугольникъ, имѣющій данную высоту и равномѣрный данному треугольнику.

Вопросъ.

§ 303. *Измѣрить площадь даннаго многоугольника.*

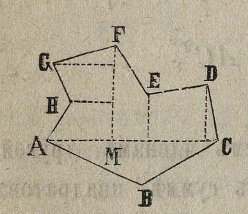
Пусть данъ какой нибудь многоугольникъ. Разобьемъ его діагоналями на треугольники и, проведя ихъ высоты, измѣримъ въ каждомъ изъ нихъ основаніе и высоту. По этимъ даннымъ легко вычислить площадь каждаго треугольника; а взявъ сумму этихъ площадей, получимъ площадь многоугольника.

Вопросъ.

§ 304. *Измѣрить площадь многоугольника со входящими углами.*

Пусть дана прямолинейная фигура, напримѣръ, $ABCDEFGH$. Фигуру эту можно разбить діагоналями на треугольники; но проще будетъ разбить ее на трапеціи и треугольники. Проведемъ діагональ AC между самыми отдаленными вершинами; изъ вершинъ F, E и D проведемъ перпендикуляры на AC, а изъ вершинъ H и G — перпендикуляры на FM. Такимъ образомъ разсматриваемая фигура будетъ разбита на 3 треугольника и на 4 трапеціи; вычисливъ тѣ и другія и сложивъ полученныя числа, найдемъ площадь всей фигуры.

Фиг. 191-я.



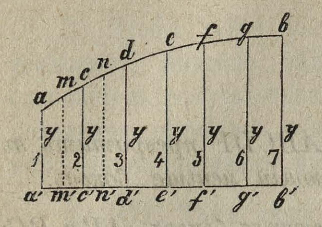
Вопросъ.

* *Измѣрить по приближенію площадь между кривою adb, прямою $a'b'$ и перпендикулярами aa' и bb', проведенными на эту прямую изъ концовъ кривой.*

Прямую $a'b'$ раздѣлимъ на четное число равныхъ частей въ точкахъ c', d', e',....; пусть h означаетъ одну изъ частей дѣленія; величина эта должна быть столь малою, чтобы части кривой adb, заключающіяся между перпендикулярами, возставленными изъ точекъ дѣленія c', d', e', ..., можно было принять за прямыя линіи.

Разсмотримъ площадь $aa'dd'$, составленную изъ двухъ последовательныхъ отрѣзковъ; раздѣлимъ $a'd'$ на три равныя части въ точкахъ m' и n'; тогда

Фиг. 192-я.



$$a'm' = m'n' = n'd' = \tfrac{2}{3}h,$$

и точка c' составляетъ середину прямой $m'n'$. Принимая дуги am, mn, dn за прямыя линіи, помощію выраженія площади трапеціи, получимъ

$$\text{площ. } aa'm'm = \frac{h}{3}(y_1 + mm'),$$

$$\text{площ. } mnn'm' = \frac{h}{3}(mm' + nn'),$$

$$\text{площ. } ndd'n' = \frac{h}{3}(nn' + y_3);$$

отъ сложенія этихъ площадей получимъ

$$\text{площ. } aa'd'd = \frac{h}{3}\,[y_1 + 2\,(mm' + nn') + y_3];$$

но въ трапеціи $mnn'm'$, $mm' + nn' = 2y_2$ (§ 287); слѣдовательно

$$\text{площ. } aa'd'd = \frac{h}{3}\,(y_1 + 4y_2 + y_3) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (1).$$

Примѣняя этотъ законъ къ площадямъ $dffd'$ и $fbb'f$, получимъ

$$\text{площ. } dffd' = \frac{h}{3}\,(y_3 + 4y_4 + y_5) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (2),$$

$$\text{площ. } fbb'f' = \frac{h}{3}\,(y_5 + 4y_6 + y_7) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (3).$$

Сложивъ равенства (1), (2) и (3), получимъ

$$\text{площ. } abb'a' = \frac{h}{3}\,[y_1 + y_7 + 4\,(y_2 + y_4 + y_6) + 2\,(y_3 + y_5)].$$

И такъ, *для полученія криволинейной площади, по приближенію, надобно третью часть линіи дѣленія на четное число умножить на сумму крайнихъ перпендикуляровъ, увеличенную*

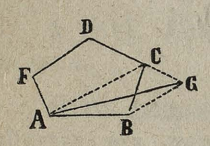
учетверенною суммою четныхъ перпендикуляровъ и удвоенною суммою нечетныхъ перпендикуляровъ. Найденная формула предложена англійскимъ математикомъ *Симпсономъ*; она имѣетъ весьма важныя приложенія.

Вопросъ.

§ 305. *Данный многоугольникъ ABCDF превратить въ полигонъ, ему равномѣрный, но имѣющій меньше боковъ.*

Соединимъ концы A и C двухъ смежныхъ боковъ AB и BC; черезъ общую ихъ точку B проведемъ BG параллельно прямой AC до пересѣченія въ G съ продолженнымъ бокомъ CD, который смеженъ съ однимъ изъ двухъ первыхъ боковъ; наконецъ соединимъ точку G съ A: тогда получимъ многоугольникъ $AGDF$, котораго число сторонъ, очевидно, на одну меньше противъ даннаго многоугольника $ABCDF$, а площади ихъ равномѣрны.

Фиг. 193-я.



Дѣйствительно, треугольники ACB и ACG равномѣрны (§ 293), потому что имѣютъ общее основаніе AC и равныя высоты—разстоянія между параллельными линіями BG и AC; придавъ къ этимъ треугольникамъ площадь $ACDF$, получимъ равномѣрныя площади $ABCDF$ и $AGDF$.

Примѣняя къ многоугольнику $AGDF$ построеніе, исполненное надъ даннымъ многоугольникомъ, получимъ треугольникъ, равномѣрный данному многоугольнику.

Вопросъ.

§ 306. *Построить квадратъ, равномѣрный данному прямоугольнику или данному треугольнику.*

1) Пусть B и H означаютъ основаніе и высоту прямоугольника, а X — бокъ искомаго квадрата.

Площадь прямоугольника равна произведенію BH, а площадь квадрата равна X^2; по условію, эти площади равномѣрны, слѣдовательно

$$X^2 = BH; \text{ отсюда } B : X = X : H.$$

И такъ, искомый бокъ легко построить, какъ среднюю пропорціональную величину между B и H (§ 273).

Точно также параллелограммъ обращается въ квадратъ.

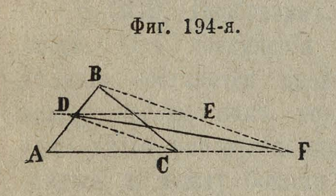
2) Чтобы найти бокъ квадрата, равномѣрнаго данному треугольнику, надобно найти среднюю пропорціональную между основаніемъ треугольника и половиною его высоты, или между половиною основанія и высотою; потому что площадь треугольника равна половинѣ произведенія изъ основанія на высоту.

§ 307. Такъ какъ всякій многоугольникъ можно обратить въ треугольникъ, ему равномѣрный, а этотъ послѣдній въ квадратъ, то *всякій многоугольникъ можно обратить въ квадратъ, ему равномѣрный.*

Вопросъ.

§ 308. *Построить треугольникъ, имѣющій данную высоту и равномѣрный данному треугольнику.*

Фиг. 194-я.



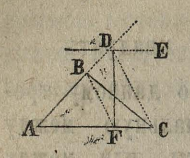
Пусть ABC данный треугольникъ. Проведемъ къ боку AC параллельную DE въ разстояніи отъ него, равномъ данной высотѣ, и разсмотримъ два случая, смотря по тому, пересѣчетъ ли DE остальные два бока (фиг. 194) или же ихъ продолженія (фиг. 195).

1) Пусть D означаетъ пересѣченіе DE съ бокомъ AB. Проведемъ DC, а черезъ вершину B — параллельную ей BF; затѣмъ соединимъ D и F; тогда получимъ треугольникъ ADF, котораго высота равна данной прямой, а площадь равномѣрна треугольнику ABC.

Дѣйствительно, треугольники BCD и FCD равномѣрны (§ 293), потому что у нихъ общее основаніе CD и высоты равны, какъ разстоянія между параллельными BF и DC; придавъ треугольникъ ACD къ этимъ равномѣрнымъ треугольникамъ, получимъ также равномѣрныя площади, именно: треугольникъ $ABC = ADF$.

2) Пусть DE параллельна AC и проведена въ разстояніи отъ нея, равномъ данной высотѣ, причемъ она пересѣкаетъ продолженіе бока AB въ точкѣ D.

Фиг. 195-я.



Проведемъ DC и параллельную къ ней BF; тогда соединивъ точку F съ D, получимъ искомый треугольникъ ADF; потому что треугольники FBC и FBD равномѣрны (§ 293); слѣдовательно, придавъ къ нимъ треугольникъ ABF, получимъ $ABC = ADF$.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Правильные многоугольники. — Измѣреніе круга.

---

12. Правильный многоугольникъ. — Около правильнаго многоугольника можно всегда описать и въ немъ вписать окружность. — Центръ и апоѳема правильнаго полигона; величина его угловъ. — Правильные полигоны одного числа угловъ между собою подобны. — Центральный уголъ. — Переходъ отъ полигона къ многоугольнику съ двойнымъ числомъ боковъ. — Построеніе полигона описаннаго, когда имѣется полигонъ вписанный, и наоборотъ. — Выраженіе черезъ радіусъ и бокъ полигона вписаннаго, подобнаго описаннаго и вписаннаго съ удвоеннымъ числомъ угловъ.

§ 309. Вообразимъ, что окружность раздѣлена на равныя части. Отъ соединенія каждыхъ двухъ сосѣдственныхъ точекъ дѣленія составится многоугольникъ, котораго всѣ бока равны между собою, какъ хорды, соотвѣтствующія равнымъ дугамъ; углы этого многоугольника также равны, потому что они вписанные, и между боками ихъ заключаются равныя дуги, а углы измѣряются, каждый, половиною этихъ дугъ. *Правильнымъ многоугольникомъ называется многоугольникъ, котораго всѣ стороны и углы равны между собою.* Поэтому, равносторонній треугольникъ и квадратъ — правильные многоугольники.

Изъ предъидущаго разсужденія слѣдуетъ:

Предложеніе.

§ 310. *Если окружность раздѣлена на равныя части, то отъ соединенія каждыхъ двухъ сосѣдственныхъ точекъ дѣленія получается правильный многоугольникъ.*

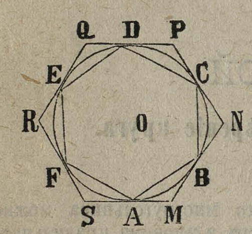
Предложеніе.

§ 311. *Если раздѣлить окружность на равныя части и черезъ каждую точку дѣленія провесть касательную до*

встрѣчи съ сосѣдственными касательными, то получится правильный многоугольникъ.

Пусть въ точкахъ A, B, C, D, E и F окружность раздѣлена на равныя части; проведя черезъ эти точки касательныя къ окружности, докажемъ, что многоугольникъ $MNPQRS$ — правильный. Проведемъ хорды AB, BC, CD и т. д., всѣ онѣ равны между собою (§ 160, 3-е); слѣд. въ треугольникахъ ABM, BCN, CDP и т. д. имѣемъ по равной сторонѣ; углы, прилежащіе къ этимъ сторонамъ, также равны (§ 168); слѣд. и остальныя сходственныя части равны, именно:

Фиг. 196-я.



1) $AM = BN = CP =$ и т. д., $BM = CN = DP$ и т. д.; притомъ сторона $AM = BM$, потому что обѣ лежатъ противъ равныхъ угловъ въ треугольникѣ ABM; значитъ всѣ вышеприведенные отрѣзки равны между собою; а отсюда слѣдуетъ, что MN, равная удвоенной BM, равна NP, удвоенной CN и т. д.; значитъ всѣ стороны многоугольника $MNPQRS$ равны между собою. 2) Изъ равенства тѣхъ же треугольниковъ ABM, BCN, CDP, . . . слѣдуетъ равенство угловъ: $\angle M = \angle N$, $\angle P = \angle Q$, $\angle R = \angle S, \ldots$ И такъ въ многоугольникѣ $MNPQRS$ всѣ стороны и всѣ углы равны между собою, слѣд. онъ правильный.

§ 312. По данному числу сторонъ правильнаго многоугольника всегда можно опредѣлить величину его угла, потому что всѣ его углы равны между собою. И дѣйствительно, пусть n означаетъ число сторонъ правильнаго многоугольника; сумма его угловъ равна $2D(n-2)$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ; слѣдовательно каждый уголъ равенъ

$$\frac{2D(n-2)}{n}.$$

Полагая послѣдовательно $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$, найдемъ:

уголъ правильнаго треугольника равенъ $^2/_3 D$,
уголъ правильнаго квадрата равенъ D,
» » пятисторонника » $^6/_5 D$,
» » шестисторонника » $^4/_3 D$, и т. д.

Предложеніе.

§ 313. *Правильные многоугольники одинаковаго числа угловъ всегда подобны.*

Изъ предъидущаго § видно, что углы правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ равны между собою; а вслѣдствіе равенства сторонъ отношенія ихъ равны между собою.

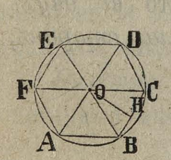
Предложеніе.

§ 314. *Около правильнаго многоугольника всегда можно описать и въ немъ вписать окружность.*

Пусть $ABCDEF$ правильный многоугольникъ; слѣдовательно стороны его равны $AB = BC = CD, \ldots$ и углы равны $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \ldots$

1) Черезъ три точки A, B и C опишемъ окружность; центръ O этой окружности соединимъ съ вершинами многоугольника, — получимъ $OA = OB = OC$, какъ радіусы окружности; докажемъ, что $DO = AO$. Пусть OH означаетъ перпендикуляръ къ хордѣ BC; слѣдовательно $BH = CH$ (§ 146). Замѣтивъ это, согнемъ чертежъ на линіи OH; при чемъ HB пойдетъ по HC, точка B совпадетъ съ C, бокъ BA пойдетъ по CD, ибо, по условію, $\angle ABC = \angle BCD$, и точка A совпадетъ съ D, ибо, вслѣдствіе того же условія, бокъ $AB = CD$; поэтому концы прямой AO совпали съ концами линіи OD; слѣдовательно $DO = AO$. Поэтому окружность, описанная радіусомъ OA изъ центра O, пройдетъ черезъ точку D. Имѣя окружность, описанную черезъ три точки B, C и D, докажемъ, точно такимъ же образомъ, что она пройдетъ и черезъ точку E, и т. д.

Фиг. 197-я.



2) Мы доказали, что около правильнаго многоугольника $ABCDEF$ можно описать окружность. Бока этого многоугольника суть хорды окружности, и такъ какъ онѣ равны, то и удалены равно отъ центра O (§ 162); поэтому и перпендикуляры, опущенные изъ центра O на бока многоугольника, равны между собою; слѣдовательно окружность, описанная изъ O, какъ центра, радіусомъ OH, равнымъ длинѣ перпендикуляра, пройдетъ черезъ ихъ основанія, которыя будутъ точками касанія,

а бока — къ ней касательными. И такъ, въ правильномъ многоугольникѣ всегда можно вписать окружность.

§ 315. Общій центръ окружностей, описанной и вписанной въ правильномъ многоугольникѣ, называется *центромъ правильнаго многоугольника.*

Апоѳемою правильнаго многоугольника называется радіусъ круга, вписаннаго въ этомъ многоугольникѣ; поэтому OH есть апоѳема.

§ 316. Уголъ, котораго вершина въ центрѣ правильнаго многоугольника, а бока проходятъ черезъ двѣ смежныя его вершины, называется *центральнымъ угломъ* правильнаго многоугольника.

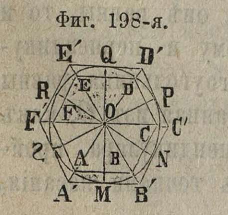
Если всѣ вершины правильнаго многоугольника соединимъ съ его центромъ, то получится столько равныхъ центральныхъ угловъ, сколько боковъ въ многоугольникѣ; равны же они потому, что равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равные центральные углы. Слѣдовательно, величина каждаго центральнаго угла найдется, если четыре прямые угла раздѣлимъ на число боковъ правильнаго многоугольника. Отсюда слѣдуетъ, что *въ двухъ правильныхъ многоугольникахъ, одинаковаго числа сторонъ, центральные углы равны между собою.*

Вопросъ.

§ 317. *Въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; требуется около круга описать правильный многоугольникъ такого же числа сторонъ.*

Рѣшеніе 1-е. Пусть $ABCDEF$ (фиг. 196), вписанный правильный многоугольникъ. Черезъ вершины его угловъ, въ нихъ окружность раздѣлена на равныя части, — проведемъ касательныя къ окружности, — получимъ правильный многоугольникъ $MNPQRS$ (§ 311); число его сторонъ одинаково съ даннымъ, потому что каждому боку перваго соотвѣтствуетъ уголъ втораго.

Фиг. 198-я.



Рѣшеніе 2-е. Пусть $ABCDEF$ — вписанный правильный многоугольникъ. Проведемъ радіусы OM, ON, OP, . . . перпендикулярно къ бокамъ даннаго многоугольника, а въ точкахъ M, N, P, ... касательныя къ окружности: получимъ правильный много-

угольникъ $A'B'C'D'E'F'$; потому что въ точкахъ M, N, P.... окружность раздѣлена на равныя части (§ 311).

Примѣчаніе 1-е. Стороны построеннаго такимъ образомъ многоугольника параллельны сторонамъ даннаго: въ самомъ дѣлѣ, радіусъ OM проведенъ перпендикулярно къ AB, и касательная $A'B'$ перпендикулярна къ OM; тоже скажемъ и о прочихъ бокахъ.

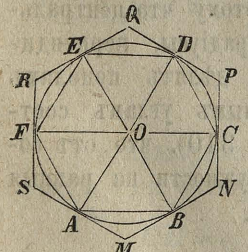
Примѣчаніе 2-е. Три точки: двѣ вершины A', A и центръ O лежитъ на одной прямой. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ A' съ O, получимъ два равные треугольника $A'OM$ и $A'OS$, потому что ипотенуза $A'O$ у нихъ общая, и катеты $OM = OS$; значитъ $\angle MOA' = \angle SOA'$, т. е. прямая $A'O$ дѣлитъ уголъ MOS пополамъ, и потому она должна пройти черезъ точку A, составляющую середину дуги SM; и такъ три точки A', A и O лежатъ на одной прямой. Точно также докажется, что линіи $B'BO$, $C'CO$ и т. д. — всѣ прямыя.

Вопросъ.

§ 318 *Около круга описанъ правильный многоугольникъ; требуется вписать въ кругъ правильный многоугольникъ такого же числа сторонъ.*

Рѣшеніе 1-е. Пусть $MNPQRS$ правильный многоугольникъ, описанный около круга. Соединимъ каждыя двѣ сосѣдственныя точки касанія A, B, C,... получимъ требуемый многоугольникъ $ABCDEF$.

Фиг. 199-я.



Дѣйствительно, если соединимъ центръ O съ точками касанія A, B, C,..., то получимъ $OA \perp MS$, $OB \perp MN$,....; слѣд. $\angle AOB = \angle M$, $\angle BOC = \angle N$... (§ 79); по условію многоугольникъ $MNPQRS$ правильный, слѣд. $\angle M = \angle N = ...$; поэтому $\angle AOB = \angle BOC = ...$ и дуг. $AB =$ дуг. $BC = ...$ (§ 160). И такъ, окружность въ точкахъ A, B, C..., раздѣлена на равныя части; слѣд. многоугольникъ $ABCDFF$ правильный (§ 311).

Рѣшеніе 2-е. Пусть $A'B'C'D'E'F'$ (фиг. 198) описанный правильный многоугольникъ. Проведемъ прямыя изъ точки O къ вершинамъ многоугольника, и соединимъ сосѣдственныя точки пересѣченія A, B, C,. . этихъ прямыхъ съ окружностью; полу-

чимъ правильный вписанный многоугольникъ $ABCDEF$. Въ самомъ дѣлѣ, центральные углы $A'OB'$, $B'OC'$,... даннаго многоугольника равны между собою (§ 312), а равнымъ центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги AB, BC, CD,...; и такъ окружность въ точкахъ A, B, C . . . раздѣлена на равныя части, — слѣдовательно многоугольникъ $ABCDEF$ правильный (§ 310).

Легко доказать, что бока этихъ многоугольниковъ параллельны; въ самомъ дѣлѣ, $A'O = B'O$ и $AO = BO$, слѣдовательно $A'O : AO = B'O : BO$; значитъ хорда AB треугольника $A'OB'$, раздѣляя два бока на части пропорціональныя, параллельна третьему боку $A'B'$.

Вопросъ.

§ 319. *Въ кругѣ вписанъ правильный многоугольникъ; требуется въ томъ же кругѣ вписать правильный многоугольникъ съ двойнымъ противъ даннаго числомъ сторонъ.*

Изъ центра даннаго многоугольника проведемъ радіусы перпендикулярно его бокамъ, и каждую точку дѣленія окружности соединимъ съ концами соотвѣтствующаго бока; получимъ требуемый многоугольникъ. Дѣйствительно, каждому боку даннаго многоугольника соотвѣтствуютъ два бока новаго многоугольника; слѣдовательно число сторонъ послѣдняго вдвое больше противъ числа сторонъ даннаго многоугольника. Дуги, соотвѣтствующія бокамъ новаго многоугольника, равны между собою; потому что центральные углы даннаго многоугольника равны, а радіусы, перпендикулярные къ соотвѣтственнымъ имъ хордамъ, дѣлятъ пополамъ эти центральные углы; равнымъ же центральнымъ угламъ соотвѣтствуютъ равныя дуги; а уже извѣстно (§ 310), что отъ соединенія сосѣдственныхъ точекъ дѣленія окружности на равныя части получается правильный многоугольникъ.

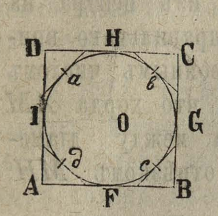
Вопросъ.

§ 320. *Около круга описанъ правильный многоугольникъ; требуется около того же круга описать правильный многоугольникъ съ двойнымъ противъ даннаго числомъ сторонъ.*

Пусть около круга описанъ правильный многоугольникъ $ABCD$; точки F, G, H и I означаютъ точки касаній. Раздѣлимъ по-

поламъ дуги HG, GF, FI и IH; черезъ точки дѣленія a, b, c и d проведемъ касательныя до пересѣченій съ боками даннаго многоугольника; получимъ многоугольникъ, у котораго вдвое болѣе сторонъ противъ даннаго, потому что въ это число войдутъ отрѣзки отъ каждаго бока даннаго многоугольника и вновь проведенныя касательныя, которыхъ число тоже одинаково съ числомъ даннаго многоугольника. Въ точкахъ a, H, b, G,... окружность раздѣлена на равныя части и черезъ точки дѣленія проведены касательныя; слѣд. полученный многоугольникъ правильный.

Фиг. 200-я.

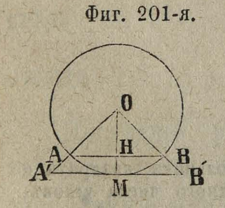


Вопросъ.

§ 321. *По извѣстнымъ величинамъ радіуса и бока правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, вычислить бокъ описаннаго правильнаго многоугольника такого же числа сторонъ.*

Пусть бокъ $AB = a$, радіусъ $AO = r$; требуется вычислить бокъ $A'B'$ описаннаго правильнаго многоугольника того же числа сторонъ. Вслѣдствіе параллельности прямыхъ $A'B'$ и AB, треугольники $A'B'O'$ и ABO подобны; поэтому сходственныя ихъ основанія пропорціональны высотамъ

Фиг. 201-я.



$$A'B' : AB = OM : OH;$$

отсюда
$$A'B' = \frac{ar}{OH}.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ AOH, по извѣстнымъ ипотенузѣ r и катету $AH = \frac{1}{2}a$, получимъ

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \text{ (§ 257) или } OH = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2};$$

слѣдовательно
$$A'B' = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

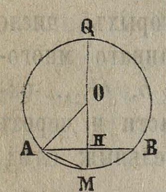
Вопросъ.

§ 322. *По извѣстнымъ величинамъ радіуса и бока правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, найти бокъ*

вписаннаго же правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ.

Пусть $AB = a$ означаетъ бокъ правильнаго многоугольника, радіусъ $AO = r$. Проведя перпендикуляръ OM изъ центра на бокъ AB, получимъ бокъ AM правильнаго вписаннаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ. Извѣстно (§ 268, 2-е), что хорда AM есть средняя пропорціональная между діаметромъ MQ и прилежащимъ отрѣзкомъ MH; слѣдовательно

Фиг. 202-я.



$$\overline{AM}^2 = MQ \times MH;$$

$MH = OM - OH$, изъ прямоугольнаго треугольника AOH, катетъ

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} \text{ (§ 321);}$$

слѣдовательно $MH = r - \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$;

поэтому $$\overline{AM}^2 = 2r\left(r - \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}\right)$$

и $$AM = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - a^2}\right)}.$$

---

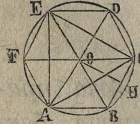
13. Зависимость отъ радіуса боковъ шестиугольника, треугольника, квадрата и десятиугольника. — Периметры правильныхъ полигоновъ, одного числа угловъ, относятся, какъ апоѳемы или какъ радіусы описанныхъ окружностей, а площади этихъ фигуръ, какъ квадраты названныхъ линій.

Предложеніе.

§ 323. *Бокъ правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, равенъ радіусу этого круга.*

Положимъ, что AB означаетъ бокъ правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Центральный уголъ AOB этого многоугольника равенъ $^4/_6 D$ или $^2/_3 D$ (буквою D означается прямой уголъ); слѣдовательно въ треугольникѣ ABO сумма угловъ

Фиг. 203-я.



$$A + B = 2D - {}^2/_3 D = {}^4/_3 D;$$

а какъ уголъ $A = B$, потому что въ треугольникѣ ABO сторона $AO = BO$, то каждый уголъ

A и B, порознь, равенъ также $^2/_3 D$. И такъ, треугольникъ ABO равносторонній, и бокъ AB равенъ радіусу AO.

Чтобы вписать въ кругѣ правильный шестисторонникъ, надобно вписать послѣдовательно шесть хордъ AB, BC, CD..., равныхъ радіусу.

§ 324. Слѣдствіе. Соединивъ, черезъ одну, вершины вписаннаго шестисторонника, получимъ правильный треугольникъ ACE, потому что онъ происходитъ отъ соединенія сосѣдственныхъ точекъ дѣленія окружности на три равныя части (§ 310): дуга $AC = CE = EA$, ибо каждая равна удвоенной дугѣ AB.

Чтобы вычислить бокъ правильнаго треугольника, замѣтимъ, что AOD есть діаметръ, потому что онъ раздѣляетъ окружность пополамъ; слѣдовательно вписанный уголъ ACD будетъ прямой; поэтому изъ прямоугольнаго треугольника ACD получимъ

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2;$$

назвавъ буквою r радіусъ круга, получимъ

$$AD = 2r, \quad CD = r;$$

слѣд.

$$AC = \sqrt{4r^2 - r^2};$$

отсюда

$$AC = r\sqrt{3}$$

Послѣднее равенство показываетъ, что *бокъ правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, равенъ радіусу этого круга, умноженному на* $\sqrt{3}$. Притомъ, отношеніе этихъ величинъ, т. е. $AC : r = \sqrt{3}$ есть число несоизмѣримое.

* *Примѣчаніе.* Впишемъ въ кругѣ правильный шестиугольникъ; на основаніи § 319, получимъ послѣдовательно правильные многоугольники о 12, 24, 48,... сторонахъ. Числа 3, 6, 12, 24,... получатся изъ формулы $2^m 3$, когда показатель m сдѣлаемъ послѣдовательно равнымъ 0, 1, 2, 3,...; поэтому, помощію циркуля и линейки, или помощію описанія окружностей и проведенія прямыхъ линій, можно вписать въ данномъ кругѣ правильные многоугольники, которыхъ число боковъ равно $2^m 3$; на такое же число равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

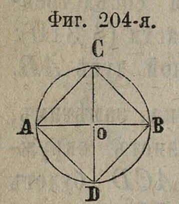
Правильные многоугольники о 3, 6, 12, 24,... сторонахъ могутъ быть описаны около даннаго круга (§ 320).

Помощію формулъ, выведенныхъ въ §§ 321 и 322, можно получить бока вышеупомянутыхъ многоугольниковъ въ зависимости отъ радіуса.

Предложеніе.

§ 325. *Отношеніе бока квадрата, вписаннаго въ кругѣ, къ радіусу этого круга, равно квадратному корню изъ числа 2.*

Фиг. 204-я.



Чтобы вписать квадратъ въ кругѣ, проведемъ два діаметра, взаимно перпендикулярные, AB и CD: такимъ образомъ окружность раздѣлится на четыре равныя части, слѣдовательно, соединивъ сосѣдственныя точки дѣленія, получимъ квадратъ $ACBD$.

Чтобы опредѣлить отношеніе бока AD этого квадрата къ радіусу $AO = r$, возьмемъ квадратъ ипотенузы AD изъ прямоугольнаго треугольника AOD; получимъ $\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2$, или $\overline{AD}^2 = 2r^2$; отсюда

$$\frac{\overline{AD}^2}{r^2} = 2 \text{ и } \frac{AD}{r} = \sqrt{2};$$

слѣдовательно $AD = r\sqrt{2}$, т. е. *бокъ квадрата вписаннаго въ кругѣ, равенъ радіусу этого круга, умноженному на* $\sqrt{2}$. Притомъ отношеніе этихъ величинъ есть число несоизмѣримое.

* *Примѣчаніе.* Вписавъ въ кругѣ квадратъ и удваивая число сторонъ, послѣдовательно получимъ вписанные въ кругѣ и описанные около него правильные многоугольники о 8, 16, 32,.. сторонахъ; числа эти получатся изъ формулы 2^m, когда m положимъ послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4,..; на столько же равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

Предложеніе.

§ 326. *Бокъ правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равенъ большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

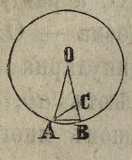
Пусть AB означаетъ бокъ десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Центральный уголъ этого многоугольника равенъ $^4/_{10}$ или

$^2/_5$ прямаго (§ 316). Въ треугольникѣ ABO сумма угловъ $A+B=2-{}^2/_5$ или $^8/_5$ прямаго; слѣдовательно,

$$\angle A=\angle B={}^4/_5 \text{ прямаго.}$$

Раздѣливъ уголъ BAO пополамъ, получимъ $CAO=CAB={}^2/_5$ пр.; а въ треугольникѣ ACO внѣшній уголъ $ACB={}^2/_5+{}^2/_5={}^4/_5$ (§ 88). Поэтому въ треугольникѣ ACO бокъ $CO=AC$, а въ треугольникѣ ABC бокъ $AC=AB$, слѣдовательно $CO=AB$.

Фиг. 205-я.



Теперь докажемъ, что радіусъ BO раздѣленъ въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніяхъ, и что большій отрѣзокъ равенъ CO. Именно, прямая AC, дѣлящая пополамъ уголъ A, раздѣляетъ противолежащій бокъ на части, пропорціональныя остальнымъ двумъ бокамъ; поэтому $BC:CO=AB:AO$, или $BC:CO=CO:BO$, потому что $CO=AB$ и $AO=BO$.

Назвавъ буквою x бокъ правильнаго десятиугольника вписаннаго, буквою r радіусъ, получимъ $r:x=x:(r-x)$ отсюда

$$x^2=r^2-rx,\ x^2+rx=r^2,\ x=-{}^1/_2 r\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2+r^2},\ x=\tfrac{r}{2}(-1\pm\sqrt{5}).$$

По смыслу вопроса x должно быть положительное, поэтому

$$x=\tfrac{r}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

* *Примѣчаніе 1.* Соединивъ черезъ одну вершины правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ, получимъ правильный пятиугольникъ, слѣд. въ кругѣ можно вписать и описать около него правильные многоугольники о 5, 10, 20, 40 и т. д.... сторонахъ, вообще о 2^t5 сторонахъ; на столько же равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

* *Примѣчаніе 2. Помощію циркуля и линейки можно вписать въ кругъ правильный пятнадцатиугольникъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, вычтя изъ дуги, равной $^1/_6$ окружности, дугу равную $^1/_{10}$ окружности, получимъ дугу, равную $^1/_{15}$ окружности; такимъ образомъ окружность раздѣлится на 15-ть равныхъ частей; а хорды, соотвѣтствующія этимъ дугамъ, составятъ правильный вписанный многоугольникъ о 15-ти сторонахъ. Удваивая послѣдовательно число сторонъ этого многоугольника, получимъ правильные вписанные многоугольники о 2^t15, когда положимъ $t=0, 1, 2, 3,\ldots$; на это же число равныхъ частей можно раздѣлить окружность.

Предложеніе.

§ 327. *Периметры правильныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа угловъ, пропорціональны апоѳемамъ и радіусамъ, окружностей описанныхъ около этихъ многоугольниковъ; а площади этихъ многоугольниковъ квадратамъ тѣхъ же линій.*

Пусть AB означаетъ сторону правильнаго многоугольника, котораго центръ O, радіусъ круга описаннаго — AO, а радіусъ круга вписаннаго, или апоѳема — OH, полагая, что OH перпендикулярна къ AB. Тѣ же значенія имѣютъ ab, oa и oh въ другомъ правильномъ многоугоугольникѣ; положимъ также, что число угловъ одинаковое въ этихъ правильныхъ многоугольникахъ.

Фиг. 206-я.

1) Намъ уже извѣстно (§ 313), что такіе многоугольники подобны; слѣдовательно, периметры ихъ P и p пропорціональны сходственнымъ сторонамъ AB и ab, т. е.

$$P : p = AB : ab.$$

Треугольники ABO и abo подобны между собой, ибо $AO = BO$, $ao = bo$; слѣд. $AO : ao = BO : bo$, и углы между этими боками равны, $\angle AOB = \angle aob$ (§ 316); слѣдов. сходственныя основанія AB и ab пропорціональны высотамъ; поэтому

$$AB : ab = HO : ho = AO : ao;$$

слѣд. $$P : p = AO : ao = HO : ho.$$

2) Назвавъ площади эихъ многоугольниковъ буквами Q и q и припомнивъ, что площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ, получимъ

$$Q : q = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2;$$

но $$AB : ab = AO : ao = HO : ho;$$

слѣд. $$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2 = \overline{HO}^2 : \overline{ho}^2.$$

поэтому $$Q : q = \overline{AO}^2 : \overline{ao}^2 = \overline{HO}^2 : \overline{ho}^2.$$

14. Постоянныя и перемѣнныя величины. — Безконечно-малыя величины. — Предѣлъ перемѣнной. — Общій признакъ пропорціональности величинъ.

§ 328. *Постоянною величиною* называется такая величина, которая въ продолженіи доказательства какого либо предложенія или рѣшенія вопроса сохраняетъ одно и тоже значеніе. Напротивъ, *перемѣнною величиною* называется такая величина, которая при тѣхъ же обстоятельствахъ измѣняется. Напримѣръ, перпендикуляръ, опущенный изъ данной точки на данную прямую, есть постоянная величина; а наклонныя, проведенныя изъ той же точки на эту прямую, будутъ перемѣнныя величины. Для даннаго круга радіусъ и діаметръ суть постоянныя величины; хорды, перпендикуляры, проведенные на хорды изъ центра, периметры многоугольниковъ, вписанныхъ и описанныхъ, суть перемѣнныя величины.

Замѣтимъ еще, что бываютъ такія постоянныя величины, которыя не измѣняются во всѣхъ вопросахъ и предложеніяхъ; напримѣръ: прямой уголъ, сумма смежныхъ угловъ, сумма угловъ треугольника и др.

§ 329. *Безконечно-малою величиною* называется такая перемѣнная величина, которая, уменьшаясь, можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, какъ бы мала ни была эта послѣдняя. Здѣсь надо обратить вниманіе на то, что безконечно-малая величина есть перемѣнное количество; поэтому какое бы малое число мы ни вообразили, напримѣръ, одну милліонную дюйма, оно не будетъ безконечно-малое, а будетъ весьма малая дробь и — величина постоянная. Безконечно-малая величина, поэтому, можетъ быть означена только буквою, а не цифрами.

Примѣръ I. Возьмемъ періодическую дробь 0, 9999....

Извѣстно, что эта дробь равна $^9/_9$, или 1-цѣ. Увеличивая число цифръ въ этой дроби, получимъ 0,9; 0,99; 0,999 и т. д., а разности между ними и 1-цею будутъ $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ и т. д.; понятно, что можно взять такое большое число разъ цифру 9 въ дроби, что разность между 1-цею и дробью будетъ меньше всякаго даннаго количества; поэтому разность между 1-цею и дробью 0,999...., при произвольномъ увеличеніи числа цифры 9, есть безконечно-малая величина.

Примѣръ II. Возьмемъ дробь $\frac{1}{x}$ и положимъ, что x по-

степенно увеличивается; слѣд. дробь $\frac{1}{x}$ будетъ перемѣнное уменьшающееся; если докажемъ, что $\frac{1}{x}$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества α, то, на основаніи опредѣленія, заключимъ, что $\frac{1}{x}$ есть безконечно-малая величина, при произвольномъ увеличиваніи числа x. Такъ какъ x перемѣнное, то посмотримъ, можно ли найти для него такія величины, при которыхъ

$$\frac{1}{x} < \alpha \ldots. (1),$$

гдѣ α данное произвольно малое количество; изъ этого неравенства получимъ

$$x > \frac{1}{\alpha} \ldots. (2).$$

Такъ какъ $\frac{1}{\alpha}$ есть нѣкоторое опредѣленное, постоянное, количество, то всякая величина, взятая для x, большая количества $\frac{1}{\alpha}$, удовлетворитъ неравенству (2), а слѣдоват. и неравенству (1).

Предложеніе.

§ 330. *Сумма двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть безконечно-малая величина.*

Пусть α и β означаютъ, каждая, безконечно-малую величину; докажемъ, что сумму $\alpha+\beta$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества δ.

Вслѣдствіе опредѣленія безконечно-малой величины, каждое изъ данныхъ слагаемыхъ можно сдѣлать меньше $\frac{1}{2}\delta$; поэтому имѣемъ

$$\alpha < \frac{\delta}{2} \quad \beta < \frac{\delta}{2};$$

сложивъ эти неравенства, получимъ

$$\alpha+\beta < \delta.$$

Примѣчаніе. Сумма $\alpha + \beta + \gamma$, въ которой α, β, γ суть безконечно-малыя величины, есть также безконечно-малая величина. Дѣйствительно, принявъ сумму $\alpha + \beta$ за одно количество, найдемъ, что сумма двухъ количествъ $(\alpha + \beta)$ и γ — безконечно-малая величина.

То же заключеніе относится къ суммѣ четырехъ, пяти и т. д. безконечно-малыхъ.

Предложеніе.

§ 331. *Разность двухъ безконечно-малыхъ величинъ есть безконечно-малая величина.*

Пусть α и β означаютъ безконечно-малыя величины. Поэтому α можно сдѣлать меньше всякой данной величины; а какъ $\alpha - \beta$ меньше α, то и подавно $\alpha - \beta$ можно сдѣлать меньше всякой данной величины.

Предложеніе.

§ 332. *Произведеніе безконечно-малой величины на постоянное количество есть безконечно-малая величина.*

Пусть m означаетъ постоянное количество, α — безконечно-малая величина; докажемъ, что произведеніе $m\alpha$ можно сдѣлать меньше всякой данной величины δ. Такъ какъ α безконечно-малая величина, то, на основаніи опредѣленія, имѣемъ

$$\alpha < \frac{\delta}{m}; \text{ а отсюда } m\alpha < \delta.$$

Поэтому $m\alpha$ есть безконечно-малая величина.

Примѣчаніе. Если въ произведеніи $A\alpha$, множитель α безконечно-малое, а множитель A перемѣнное, но уменьшающееся количество, то произведеніе $A\alpha$ будетъ безконечно-малое. Такъ какъ A уменьшается, то оно меньше нѣкотораго постояннаго количества B; слѣд. $A\alpha < B\alpha$; но произведеніе $B\alpha$, постояннаго на безконечно-малое, есть безконечно-малое, слѣд. и подавно $A\alpha$ есть безконечно-малое. Если бъ множитель A въ произведеніи $A\alpha$ былъ перемѣнное увеличивающееся, но не до безконечности, а до нѣкотораго постояннаго количества C, то и тогда произведеніе $A\alpha$ будетъ безконечно-малое, ибо $A\alpha < C\alpha$. Періодическая десятичная дробь 0,9999.... можетъ служить

примѣромъ перемѣнной величины, увеличивающейся съ увеличеніемъ числа цифръ 9, но всегда меньшей постоянной $^9/_9$, или 1-цы.

Предложеніе.

§ 333. *Если каждая изъ двухъ разностей, порознь, есть безконечно-малое количество, то и произведеніе уменьшаемыхъ безъ произведенія вычитаемыхъ есть безконечно-малое количество.*

Пусть $A - a = \alpha$, $B - b = \beta$, гдѣ α и β — безконечно-малыя; надо доказать, что $AB - ab$ есть безконечно-малое количество.

Вслѣдствіе условія, имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} A = a + \alpha \\ B = b + \beta \end{array}\right\}; \text{ отсюда } AB - ab = b\alpha + a\beta + \alpha\beta.$$

Каждое слагаемое $b\alpha$, $a\beta$ и $\alpha\beta$ есть безконечно-малое (§ 332); слѣд. и сумма (§ 330), а вмѣстѣ съ тѣмъ и $AB - ab$, есть безконечно-малое количество.

Предложеніе.

§ 334. *Частное отъ дѣленія безконечно-малой величины на постоянное количество есть безконечно-малая величина.*

Пусть α означаетъ безконечно-малое количество, а m постоянное количество. Докажемъ, что $\alpha : m$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества δ.

Вслѣдствіе опредѣленія безконечно-малой величины, имѣемъ

$$\alpha < m\delta, \text{ а отсюда } \frac{\alpha}{m} < \delta.$$

Предложеніе.

§ 335. *Если въ равенствѣ*

$$A + \alpha = B + \beta,$$

A и B постоянныя количества, α и β безконечно-малыя величины, то постоянныя A и B равны между собою.

Допустимъ, что A не равно B; пусть $A > B$ и $A - B = m$, гдѣ разность m должна быть постоянное количество, ибо A и B постоянныя. Перенесеніемъ членовъ въ данномъ равенствѣ изъ одной части въ другую, получимъ $A - B = \beta - \alpha$; поэтому $m = \beta - \alpha$;

отсюда $\beta = m + \alpha$. И такъ, количество β составляетъ сумму постояннаго m и безконечно-малаго α; слѣд. β не можетъ быть сдѣлано меньше количества m; значитъ β не безконечно-малое, ибо свойство безконечно-малаго состоитъ въ томъ, что оно можетъ быть сдѣлано меньше всякаго даннаго; — такое заключенiе противно условiю, по которому β есть безконечно-малое; значитъ, нельзя допустить, что A не равно B; поэтому $A = B$.

Замѣтимъ, что въ равенствѣ $A + \alpha = B + \beta$ безконечно-малыя количества α и β могутъ быть положительныя или отрицательныя.

Примѣчанiе I. Разсмотримъ количество

$$A + \alpha,$$

гдѣ A — постоянное, α — безконечно-малое.

По опредѣленiю безконечно-малой величины (§ 329), α есть величина перемѣнная и уменьшающаяся; поэтому $A + \alpha$ есть также величина перемѣнная и *уменьшающаяся*; количество же A съ измѣненiемъ α остается постояннымъ. Перемѣнное $A + \alpha$ и постоянное A находятся въ такой зависимости, что разность α между ними можетъ быть сдѣлана меньше всякого даннаго количества; слѣд. перемѣнное $A + \alpha$, уменьшаясь, постепенно приближается къ постоянной A, но никогда его не достигнетъ, потому что α никогда не обратится въ нуль (§ 329). Въ этомъ смыслѣ постоянное A называется *предѣломъ* перемѣнной $A + \alpha$. Еслибъ вмѣсто $A + \alpha$, разсматривали $A - \alpha$, то нашли бы, что перемѣнное $A - \alpha$ приближалось бы къ постоянному A, *увеличиваясь*; такъ что постоянное A было бы предѣломъ перемѣннаго $A - \alpha$.

И такъ, предѣломъ перемѣнной называется постоянное количество, къ которому перемѣнное, увеличиваясь или уменьшаясь, приближается по величинѣ такъ, что разность между перемѣннымъ и постояннымъ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества.

Напримѣръ, 1-ца есть предѣлъ перiодической дроби 0,(9). Въ самомъ дѣлѣ, съ увеличенiемъ числа цифръ въ этой дроби, она будетъ увеличиваться, между тѣмъ 1-ца остается постоянною; разности между 1-цею и дробями 0,9; 0,99; 0,999;... будутъ послѣдовательно равны 0,1, 0,01, 0,001,..., слѣд. онѣ уменьшаются и могутъ быть сдѣланы меньше всякаго даннаго количества; поэтому 1-ца есть предѣлъ дроби 0,9999....

Примѣчаніе II. На основаніи опредѣленія предѣла, предложеніе изложенное въ § 335 можно такъ выразить:

Предѣлы двухъ равныхъ перемѣнныхъ величинъ равны между собою.

Дѣйствительно, изъ равенства

$$A+\alpha=B+\beta,$$

гдѣ A и B постоянныя, α и β — безконечно-малыя количества, мы заключили, что $A=B$; но A есть предѣлъ $A+\alpha$, B есть предѣлъ $B+\beta$.

Примѣчаніе III. Если отношеніе перемѣнныхъ равно постоянной величинѣ, то и отношеніе предѣловъ этихъ перемѣнныхъ равно той же постоянной величинѣ.

Положимъ, что

$$\frac{A+\alpha}{B+\beta}=m,$$

гдѣ m — постоянное количество, A и B суть предѣлы перемѣнныхъ $A+\alpha$ и $B+\beta$. Надо доказать, что $\frac{A}{B}=m$.

Изъ даннаго равенства имѣемъ

$$A+\alpha=Bm+m\beta.$$

Такъ какъ $m\beta$ есть безконечно-малое (§ 332), Bm — постоянное, то на основаніи предложенія § 335 или на основаніи предъидущаго II-го примѣчанія, получимъ

$$A=B\,m,\ \text{отсюда}\ \frac{A}{B}=m.$$

Очевидно, что предложеніе предъидущаго примѣчанія (II) есть частный случай, изложеннаго сейчасъ предложенія, когда $m=1$. Помощію свойствъ безконечно-малыхъ количествъ докажемъ весьма простой признакъ пропорціональности величинъ; онъ выражается слѣдующимъ предложеніемъ.

Предложеніе.

§ 336. *Если двѣ величины находятся въ такой зависимости, что, во 1-хъ, съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной изъ нихъ, другая также увеличивается или уменьшается, и, во 2-хъ, съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной въ 2, 3, 4 и т. д. раза, другая также увеличивается или уменьшается во столько же разъ, то эти величины пропорціональны.*

Пусть A и A' означаютъ двѣ величины, однородныя или разнородныя, которыя удовлетворяютъ условіямъ предложенія, именно: съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ величины A въ 2, 3, 4... раза, увеличивается или уменьшается во столько же разъ и величина A'. Означимъ буквами a и b какія нибудь двѣ величины, принадлежащія A, а буквами a' и b' соотвѣтствующія имъ величины и принадлежащія роду величинъ A'. Напримѣръ, если подъ A будемъ подразумѣвать углы, а подъ A' дуги, отвѣчающія этимъ угламъ, описанныя изъ ихъ вершинъ произвольными, но равными радіусами, то подъ a и b должно разумѣть какіе нибудь два угла, а подъ a' и b' двѣ дуги, соотвѣтствующія этимъ угламъ и описанныя изъ вершинъ равными радіусами.

Для ясности напишемъ величины одного рода A въ вертикальномъ столбцѣ, а противъ нихъ соотвѣтственныя имъ величины рода A':

	A		A',
величинѣ	a	соотвѣтствуетъ	a',
„	b	„	b'.

Надобно доказать, что $a : b = a' : b'$ (§ 221).

Для доказательства предложенія, надо найти отношеніе a къ b, потомъ найти отношеніе a' къ b', и если окажется, что найденныя отношенія равны между собою, то предложеніе доказано. Намъ извѣстно, что отношеніе двухъ величинъ отыскивается точно, — когда величины соизмѣримы, или находится только по приближенію,—когда эти величины несоизмѣримы; поэтому при доказательствѣ предложенія будемъ различать два случая.

1) Положимъ, что a и b *соизмѣримы*, и общая ихъ мѣра x содержится p разъ въ a и q разъ въ b; слѣд. $a = px$, $b = qx$; отсюда

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \dots (1).$$

Чтобы найти отношеніе величинъ a' и b' замѣтимъ, что отъ уменьшенія a въ p разъ, а b въ q разъ, вслѣдствіе втораго условія предложенія, соотвѣтственныя имъ величины a' и b' уменьшатся: первая въ p, а вторая въ q разъ, такъ что

величинѣ	$\frac{a}{p}$, или x	будетъ соотвѣтствовать	$\frac{a'}{p}$,
„	$\frac{b}{q}$, или x	„ „	$\frac{b'}{q}$.

И такъ, одной и той же величинѣ x рода A соотвѣтствуютъ двѣ величины $a' : p$ и $b' : q$ рода A'; эти двѣ величины необходимо равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ одна была больше другой, то вышло бы, что съ увеличеніемъ величинъ рода A' остались бы безъ перемѣны величины рода A, — что противно первому условію предложенія; значитъ

$$\frac{a'}{p} = \frac{b'}{q}; \text{ отсюда } \frac{a'}{b'} = \frac{p}{q} \dots . (2).$$

Изъ (1) и (2) равенствъ получимъ $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

2) Пусть количества a и b несоизмѣримы. Найдемъ отношеніе $a : b$ съ точностью до $\frac{1}{n}$, гдѣ n означаетъ какое угодно цѣлое число.

Примѣняясь къ § 218, раздѣлимъ b на n равныхъ частей и положимъ, что $\frac{b}{n}$ содержится m разъ въ a, но не содержится въ немъ $(m+1)$ разъ; слѣд. полагаемъ

$$a > \frac{b}{n} \cdot m \text{ и } a < \frac{b}{n} \cdot (m+1)$$

или

$$\frac{b}{n} m < a < \frac{b}{n} (m+1) \dots . (1).$$

Мы положили вначалѣ этого параграфа,

что величинѣ a рода A соотвѣтствуетъ a' рода A'
и что „ b „ A „ b' „ A'.

Вслѣдствіе втораго условія предложенія, по которому съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной величины въ 2, 3, 4 и т. д. раза, другая также увеличивается или уменьшается во столько же разъ, получимъ

величинѣ $\frac{b}{n}$ рода A соотвѣтствуетъ $\frac{b'}{n}$ рода A',
„ $\frac{b}{n} . m$ „ A „ $\frac{b'}{n} . m$ „ A',
„ $\frac{b}{n}(m+1)$ „ A „ $\frac{b'}{n}(m+1)$ „ A'.

Возьмемъ найденныя выше неравенства, выражающія зависимость между количествами рода A,

$$\frac{b}{n} m < a < \frac{b}{n} (m+1) \ldots . (1);$$

соотвѣтствующія имъ количества рода A' доставятъ неравенства

$$\frac{b'}{n} m < a' < \frac{b'}{n} (m+1) \ldots (2)$$

на основаніи перваго условія предложенія, по которому съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной величины, другая тоже увеличивается или уменьшается; дѣйствительно, равенство (1) показываетъ, что при измѣненіи величинъ рода A, при переходѣ ихъ отъ a къ $\frac{b}{n} m$ произошло уменьшеніе; поэтому и при измѣніи величинъ рода A', при переходѣ соотвѣтствующихъ величинъ отъ a' къ $\frac{b'}{n} m$ должно произойти также уменьшеніе, т. е. $\frac{b'}{n} m < a'$.

Изъ неравенствъ (1) имѣемъ

$$\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m+1}{n},$$

а изъ (2)

$$\frac{m}{n} < \frac{a'}{b'} < \frac{m+1}{n}.$$

Такъ какъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ заключаются между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, которыхъ разность равна $\frac{1}{n}$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{m}{n} + \alpha \\ \frac{a'}{b'} &= \frac{m}{n} + \beta \end{aligned}\right\} (3),$$

гдѣ $\alpha < \frac{1}{n}$ и $\beta < \frac{1}{n}$; очевидно, что α и β можно принять за безконечно-малыя, потому что n, по условію, можно взять больше всякаго даннаго количества.

Изъ равенствъ (3) имѣемъ

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}-\alpha,$$
$$\frac{m}{n}=\frac{a'}{b'}-\beta,$$

отсюда

$$\frac{a}{b}-\alpha=\frac{a'}{b'}-\beta;$$

въ этомъ равенствѣ $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ суть постоянныя количества, α и β безконечно-малыя; слѣд. на основаніи § 335,

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}.$$

Примѣчаніе. Недостаточно одного условія, что съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной величины увеличивается или уменьшается соотвѣтствующая ей другая величина, чтобы сдѣлать заключеніе о пропорціональности такихъ величинъ. Напримѣръ, нельзя сказать, что хорды пропорціональны соотвѣтственнымъ дугамъ, хотя съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ дуги увеличивается или уменьшается и соотвѣтственная хорда. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ дугу AB, ей соотвѣтствуетъ хорда AB; удвоимъ дугу AB, отложивъ дуг. $BC=$ дугѣ AB; новой дугѣ ABC соотвѣтствуетъ хорда AC, которая не будетъ вдвое больше хорды AB; потому что хор. $AC<$ хор. $AB+$ хор. BC, или хор. $AC<2$ хор. AB; слѣдоват. отношеніе хордъ $\frac{AC}{AB}<2$, тогда какъ отношеніе дугъ ABC и AB равно 2.

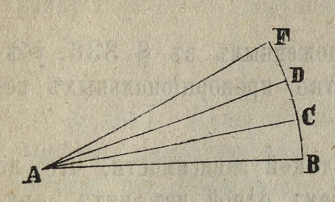
Фиг. 207-я.

§ 337. *Примѣчаніе.* Посмотримъ, какъ примѣняется сейчасъ доказанное предложеніе къ извѣстнымъ намъ предложеніямъ о пропорціональности центральныхъ угловъ, отрѣзковъ двухъ прямыхъ, заключающихся между тремя параллельными линіями, и площадей прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія.

1) Пусть данъ уголъ BAC, ему соотвѣтствуетъ дуга BC.

a) Съ увеличенiемъ дуги увеличивается и соотвѣтствующiй ей уголъ (§ 161).

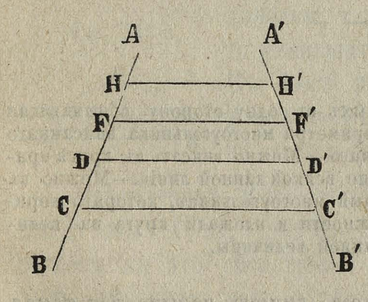
Фиг. 208-я.



b) Если дугу BC увеличимъ напримѣръ въ 3 раза, отложивъ $CD = DF = BC$, то уголъ BAF, соотвѣтствующiй тройной дугѣ BF, также увеличится въ 3 раза (§ 160); отсюда на основанiи предложенiя § 336, заключаемъ о пропорцiональности центральныхъ угловъ соотвѣтственнымъ дугамъ.

2) Двѣ прямыя AB и $A'B'$ разсѣчемъ двумя параллельными CC' и DD'; отрѣзку CD первой линiи соотвѣтствуетъ $C'D'$ отрѣзокъ второй линiи.

Фиг. 209-я.

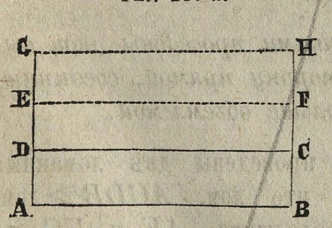


a) Очевидно, что съ увеличенiемъ CD увеличивается $C'D'$.

b) Увеличимъ, напримѣръ, въ 3 раза отрѣзокъ CD, отложивъ $DF = FH = CD$, получимъ CH; черезъ точки F и H проведемъ параллельныя къ CC', получимъ $D'F' = F'H' = C'D'$ (§ 232); слѣд. $C'H'$ тоже увеличится въ 3 раза. И такъ, оба условiя пропорцiональности выполнены, слѣд. и проч.

3) Возьмемъ прямоугольникъ $ABCD$, въ которомъ AB — основанiе, а AD — высота.

Фиг. 210-я.



a) Очевидно, что съ увеличенiемъ высоты AD увеличивается площадь прямоугольника $ABCD$.

b) Увеличимъ высоту, напримѣръ въ 3 раза, отложивъ $DE = EG = AD$; получимъ AG; проведя параллельныя черезъ точки E и G къ прямой AB, получимъ два прямоугольника DF и EH, равные прямоугольнику $ABCD$ (§ 131); слѣд. площадь прямоугольника AH въ 3 раза больше площади прямоугольника $ABCD$. И такъ, выполнены оба условiя пропорцiональности, слѣд. и проч.

§ 338. Двѣ величины называются *обратно пропорцiональ-*

ными, если отношеніе какихъ нибудь количествъ одной величины равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ количествъ другой величины.

Примѣнясь къ разсужденіямъ, изложеннымъ въ § 336, убѣдимся въ слѣдующемъ признакѣ обратно пропорціональныхъ величинъ:

Если двѣ величины находятся въ такой зависимости, что во 1-хъ, съ *увеличеніемъ* или уменьшеніемъ одной изъ нихъ, другая, на оборотъ, *уменьшается* или увеличивается, и, во 2-хъ, съ *увеличеніемъ* или уменьшеніемъ одной въ 2, 3, 4 и т. д. раза, другая, на оборотъ, *уменьшается* или увеличивается во столько же разъ, то эти величины *обратно пропорціональны.*

---

15. Изъ двухъ линій выпуклыхъ или вогнутыхъ въ одну сторону обнимающая длиннѣе обнимаемой.—Окружность больше периметра многоугольника вписаннаго и меньше периметра многоугольника описаннаго.—Можно вписать въ кругѣ правильный многоугольникъ, котораго бокъ меньше всякой данной линіи.—Можно въ кругѣ вписать и около него описать правильный многоугольникъ, котораго периметръ и площадь будетъ разниться отъ окружности и площади круга на количество меньше всякой данной величины.

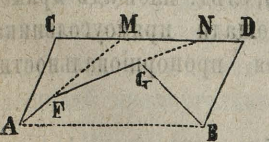
§ 339. *Выпуклою* или *вогнутою* линіею называется такая линія, которую прямыя линіи, проводимыя въ произвольныхъ направленіяхъ, пересѣкаютъ не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

Предложеніе.

§ 340. *Если между двумя точками проведены двѣ выпуклыя ломанныя линіи по одну сторону прямой, соединяющей эти точки, то объемлющая больше объемлемой.*

Пусть между точками A и B проведены двѣ ломанныя $ACDB$ и $AFGB$; надо доказать, что лом. $ACDB >$ лом. $AFGB$. Продолжимъ AF и FG до пересѣченія объемлющей въ точкахъ M и N. Прямая есть кратчайшее разстояніе между двумя точками; поэтому

Фиг. 211-я.



$$AC + CM > AF + FM,$$
$$FM + MN > FG + GN,$$
$$GN + ND + DB > BG.$$

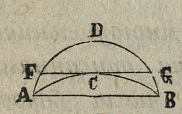
Сложимъ эти неравенства по частямъ, при чемъ замѣнимъ $CM + MN + ND$ на CD и отнимемъ отъ обѣихъ частей поровну $FM + GN$; получимъ $AC + CD + DB > AF + FG + BG$.

Предложеніе.

§ 341. *Если между двумя точками проведены двѣ выпуклыя линіи по одну сторону прямой, соединяющей эти точки, то объемлющая больше объемлемой.*

Докажемъ, вообще, что всѣ объемлющія болѣе своей объемлемой; для этого предположимъ, что имѣемъ рядъ линій, обнимающихъ выпуклую линію ACB. Эти объемлющія, удаляясь отъ ACB, могутъ послѣдовательно, 1) увеличиваться, или 2) послѣдовательно уменьшаться, или же наконецъ 3) измѣняться періодически, т. е. то послѣдовательно увеличиваться, то уменьшаться, то вновь увеличиваться, и т. д. Въ 1-мъ изъ названныхъ случаевъ продолженіе доказано. Покажемъ, что остальные два случая не могутъ имѣть мѣста.

Фиг. 212-я.



Разсмотримъ 2-й случай. Положимъ, что объемлющія, удаляясь отъ ACB, послѣдовательно уменьшаются. Спрашивается, можетъ ли это уменьшеніе продолжаться безпредѣльно? т. е. можетъ ли одна изъ объемлющихъ линій обратиться въ точку? Очевидно нѣтъ. Слѣдовательно, объемлющія линіи, удаляясь отъ ACB и послѣдовательно уменьшаясь, достигнутъ до нѣкоторой наименьшей объемлющей. Положимъ, что эта наименьшая есть ADB; и такъ, мы полагаемъ, что всякая выпуклая линія, находящаяся между ACB и ADB, будетъ болѣе линіи ADB. Невѣрность такого заключенія обнаруживается слѣдующимъ построеніемъ: Проведемъ прямую FG между линіями ACB и ADB такъ, чтобы она не пересѣкла линію ACB; тогда получимъ выпуклую линію $AFGB$, заключающуюся между ACB и ADB, которая будетъ менѣе ADB; потому что эти линіи имѣютъ общія части AF и BG, а прямая FG меньше линіи FDG (§ 16). Противорѣчіе это произошло вслѣдствіе нашего предположенія, что объемлющія линіи, удаляясь отъ ACB, послѣдовательно уменьшаются, а слѣдовательно это предположеніе несправедливо. И такъ, 2-й случай не имѣетъ мѣста.

Разсмотримъ 3-й случай. Положимъ, что объемлющія, удаляясь отъ ACB, увеличиваются и, дойдя до извѣстнаго предѣла

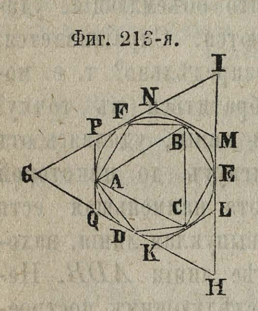
увеличенія, начинают уменьшаться. Тогда, приложивъ къ этому случаю разсужденія предъидущаго случая, найдемъ, что и этотъ случай не можетъ имѣть мѣста.

И такъ, объемлющія, удаляясь отъ ACB, не могутъ последовательно уменьшаться, не могутъ измѣняться періодически; слѣд. онѣ должны послѣдовательно увеличиваться; а слѣд. предложеніе доказано вообще, т. е., что вообще изъ двухъ выпуклыхъ, проведенныхъ между однѣми и тѣми же точками и по одну сторону прямой, соединяющей эти точки, объемлющая болѣе объемлемой, будутъ ли эти линіи ломанныя, кривыя или смѣшанныя, такъ какъ при доказательствѣ мы не сдѣлали никакого условія относительно вида этихъ выпуклыхъ линій *).

Предложеніе.

§ 342. *Окружность больше периметра многоугольника вписаннаго и меньше периметра многоугольника описаннаго; притомъ вписанные периметры съ удвоеніемъ числа боковъ увеличиваются, а описанные периметры уменьшаются.*

Фиг. 213-я.



1) Пусть ABC означаетъ многоугольникъ, вписанный въ кругѣ; а GIH описанный многоугольникъ. Каждый изъ боковъ вписаннаго многоугольника меньше соотвѣтствующей ему дуги, слѣдовательно

$AB <$ дуги AFB,
$BC <$ дуги BEC,
$AC <$ дуги ADC.

Сложивъ эти неравенства, найдемъ, что периметръ вписаннаго многоугольника меньше окружности.

Дуга окружности есть выпуклая линія, потому что прямая линія пересѣкаетъ окружность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ; поэтому, на основаніи предъидущаго предложенія,

дуга $DAF <$ лом. DGF,
дуга $FBE <$ лом. FIE,
дуга $ECD <$ лом. EHD.

---

*) Доказательство это принадлежитъ знаменитому нашему Академику М. В. Остроградскому.

Сложивъ эти неравенства, найдемъ, что окружность меньше периметра описаннаго многоугольника *GHI*.

2) Докажемъ, что съ удвоенiемъ числа сторонъ периметры вписанныхъ многоугольниковъ увеличиваются, а описанныхъ — уменьшаются. По данному многоугольнику *ABC* впишемъ многоугольникъ *ADCEBF* съ удвоеннымъ числомъ боковъ, и опишемъ ему подобный *KLMNPQ*.

Каждый бокъ многоугольника *ABC* меньше суммы соотвѣтствующихъ ему двухъ боковъ многоугольника *ADCEBF*; слѣдовательно периметръ перваго многоугольника меньше периметра втораго многоугольника, т. е. периметры вписанныхъ многоугольниковъ увеличиваются съ удвоенiемъ числа боковъ.

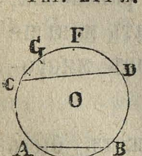
Бока *KL*, *MN* и *PQ* описаннаго многоугольника меньше соотвѣтственныхъ имъ ломанныхъ *KHL*, *MIN* и *PGQ*; остальные же бока перваго многоугольника составляютъ остальныя части периметра многоугольника *HGI*; слѣдовательно первый периметръ меньше втораго т. е. съ увеличенiемъ числа боковъ описанныхъ многоугольниковъ периметры ихъ уменьшаются.

Предложенiе.

§ 343. *Можно вписать въ кругъ правильный многоугольникъ, бокъ котораго будетъ меньше всякой данной линiи.*

Пусть *AB* означаетъ данную прямую, и требуется вписать правильный многоугольникъ, котораго бокъ былъ бы меньше *AB*.

Фиг. 214-я.



Впишемъ въ кругѣ какой нибудь правильный многоугольникъ, и положимъ, что *CD* означаетъ его бокъ. Пусть дуга *CD* больше дуги *AB*. Раздѣлимъ дугу *CD* пополамъ, въ точкѣ *F*; потомъ раздѣлимъ пополамъ дугу *CF*, въ точкѣ *G*; потомъ пополамъ дугу *CG* и т. д. Такъ какъ будемъ получать все дуги меньшiя и меньшiя, то очевидно дойдемъ до такой дуги, напр. *CG*, которая будетъ меньше дуги *AB*; слѣд. и хорда *CG* будетъ меньше хорды *AB*, и она выразитъ бокъ правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ.

Предложенiе.

§ 344. *Можно въ кругъ вписать и описать около него правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ, кото-*

рыхъ разность периметровъ будетъ меньше всякой данной величины.

Пусть P и P' означаютъ периметры правильныхъ многоугольниковъ, съ одинаковымъ числомъ боковъ, именно, P — периметръ вписаннаго многоугольника, а P' — описаннаго около окружности; AB и $A'B'$ означаютъ ихъ стороны; OH и OM— апоѳемы этихъ многоугольниковъ.

Извѣстно (§ 327), что периметры правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны апоѳемамъ; слѣдовательно

Фиг. 215-я.

$$P' : P = OM : OH;$$

отсюда $$P' - P : P' = OM - OH : OM;$$

но $$OM - OH = MH,$$

слѣд. $$P' - P : P' = MH : OM;$$

отсюда $$P' - P = MH \times \frac{P'}{OM}.$$

Перпендикуляръ MH меньше наклонной AM, а эта послѣдняя есть бокъ правильнаго многоугольника; слѣд. можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины, если только произвольно удваивать число боковъ (§ 343); поэтому MH есть безконечно-малое. Въ произведеніи $MH \times \frac{P'}{OM}$ множитель $\frac{P'}{OM}$ есть величина уменьшающаяся, ибо периметръ P' описаннаго многоугольника, съ увеличеніемъ числа боковъ, уменьшается, а радіусъ OM — постоянная; другой множитель MH есть безконечно-малая; слѣд. произведеніе будетъ безконечно малое (§ 332, примѣч.). И такъ, вторую часть послѣдняго равенства, а слѣд. и разность периметровъ, $P' - P$, можно сдѣлать меньше всякой данной величины, если удваивать число боковъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго.

§ 345. Слѣдствіе I. Мы видѣли, что MH можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины; но MH есть разность апоѳемъ OM и OH правильныхъ многоугольниковъ, описаннаго и вписаннаго въ кругѣ. Отсюда заключаемъ, что *въ кругъ можно вписать и около него описать такіе правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ, что разность между ихъ апоѳемами будетъ меньше всякой данной величины.*

§ 346. Слѣдствіе II. *Всегда можно въ кругъ вписать, а также и описать около него такой правильный много-*

угольникъ, что разность между окружностью и периметромъ будетъ меньше всякаго даннаго количества.

Пусть C означаетъ какую нибудь окружность, P и P' — периметры правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго, одинаковаго числа сторонъ. Намъ извѣстно, что

$$C > P \text{ и } C < P',$$

поэтому

$$C - P < P' - P \text{ и } P' - C < P' - P;$$

но при удваиванiи числа сторонъ упомянутыхъ многоугольниковъ, разность $P' - P$ между периметрами можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества; слѣд. и подавно разности $C - P$ и $P' - C$ могутъ быть сдѣланы меньше всякаго даннаго количества.

* *Окружность есть предѣлъ периметровъ вписанныхъ въ ней правильныхъ многоугольниковъ, а также и описанныхъ около нея многоугольниковъ, когда число сторонъ многоугольниковъ постепенно удваивается.*

Дѣйствительно, если вписать въ окружность C правильный многоугольникъ и удваивать постепенно число боковъ, то периметры P будутъ увеличиваться, а C остается при этомъ безъ перемѣны; слѣд. C есть постоянное, а P перемѣнное увеличивающееся количество; мы доказали, что разность $C - P$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества; поэтому C есть предѣлъ P. Также объяснимъ, что C есть предѣлъ для описанныхъ периметровъ P', притомъ эта послѣдняя перемѣнная съ удваиванiемъ числа боковъ уменьшается.

Предложенiе.

§ 347. *Можно въ кругѣ вписать и описать около него правильные многоугольники, одинаковаго числа сторонъ, которыхъ разность площадей будетъ меньше всякой данной величины.*

Пусть Q и Q' означаютъ площади правильныхъ многоугольниковъ съ одинаковымъ числомъ боковъ, именно Q — площадь вписаннаго многоугольника, а Q' — описаннаго; AB и $A'B'$ стороны этихъ многоугольниковъ; OH и OM — апоѳемы (фиг. 215).

Извѣстно (§ 327), что площади правильныхъ, подобныхъ многоугольниковъ пропорцiональны квадратамъ апоѳемъ; слѣд.

$$Q' : Q = \overline{OM}^2 : \overline{OH}^2;$$

отсюда

$$Q' - Q : Q' = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2 : \overline{OM}^2.$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ AHO, $\overline{AH}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OH}^2$ или $\frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2$; потому что $AH = \frac{1}{2}AB$ и $AO = OM$; поэтому предъидущая пропорція обратится въ слѣдующую:

$$Q' - Q : Q' = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 : \overline{OM}^2;$$

отсюда $$Q' - Q = (\frac{1}{2}AB)^2 \times \frac{Q'}{\overline{OM}^2}.$$

Въ кругѣ можно вписать правильный многоугольникъ, котораго бокъ AB будетъ меньше всякой данной величины; слѣдовательно множитель $(\frac{1}{2}AB)^2$ будетъ меньше всякой данной величины; а какъ съ увлеченіемъ числа сторонъ описаннаго многоугольника, Q' уменьшается, а радіусъ OM — постояненъ, то другой множитель $\frac{Q'}{\overline{OM}^2}$ будетъ уменьшаться; слѣдовательно произведеніе, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разность площадей $Q' - Q$, можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

§ 348. Слѣдствіе. Площадь круга заключается между площадями многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго около круга; слѣд. *всегда можно въ кругѣ вписать или около него описать правильный многоугольникъ, котораго площадь будетъ разниться отъ площади круга на безконечно-малое.*

* Отсюда выводимъ, что *площадь круга есть предѣлъ для площадей правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ и описанныхъ, при удваиваніи числа боковъ многоугольника.*

---

16. Окружности пропорціональны ихъ радіусамъ.—Отношеніе окружности къ діаметру. — Площадь круга равна половинѣ произведенія окружности на радіусъ.— Площади круговъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ.— Подобныя дуги пропорціональны ихъ радіусамъ. — Кругъ, построенный на ипотенузѣ, равномѣренъ суммѣ круговъ, построенныхъ на катетахъ.

Предложеніе.

§ 349. *Окружности пропорціональны ихъ радіусамъ.*

Пусть C и c означаютъ окружности двухъ круговъ, R и r — ихъ радіусы; надобно доказать, что $C : c = R : r$.

Около круговъ опишемъ правильные многоугольники одинаковаго числа боковъ, слѣд. подобные, и вообразимъ, что число

ихъ боковъ постепенно удваивается; черезъ постепенное удвоеніе необходимо получимъ такіе многоугольники, которыхъ периметры будутъ разниться отъ окружностей на количество безконечно-малое (§ 346). Назовемъ въ этихъ послѣднихъ многоугольникахъ буквою P периметръ многоугольника, описаннаго около окружности C, а буквою p — периметръ многоугольника, описаннаго около окружности c и подобнаго первому; то $P = C + \alpha$, $p = c + \beta$, гдѣ α и β суть количества безконечно-малыя. Такъ какъ периметры правильныхъ многоугольникахъ одинаковаго числа сторонъ пропорціональны апоѳемамъ, т. е. радіусамъ вписанныхъ круговъ, то $P : R = p : r$, слѣд. $(C + \alpha) : R = (c + \beta) : r$; послѣднюю пропорцію можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{C}{R} + \frac{\alpha}{R} = \frac{c}{r} + \frac{\beta}{r},$$

гдѣ $\frac{\alpha}{R}$ и $\frac{\beta}{r}$ суть безконечно-малыя, а $\frac{C}{R}$ и $\frac{c}{r}$ — постоянныя; слѣд., на основаніи § 335, эти постоянныя равны между собою, т. е.

$$\frac{C}{R} = \frac{c}{r}.$$

Примѣчаніе. При доказательствѣ можно воспользоваться свойствомъ предѣловъ, изложеннымъ въ примѣчаніи III параграфа 335-го. Пусть C и c, R и r означаютъ окружности и ихъ радіусы, P и p — периметры описанныхъ правильныхъ, подобныхъ многоугольниковъ. Радіусы R и r суть въ тоже время апоѳемы описанныхъ многоугольниковъ; слѣд. на основаніи § 327,

$$P : p = R : r;$$

но C и c суть предѣлы перемѣнныхъ P и p; отношеніе этихъ перемѣнныхъ равно постоянному количеству $(R : r)$; слѣд. и отношеніе $(C : c)$ ихъ предѣловъ равно тому же количеству (§ 335, прим. III); слѣд.

$$C : c = R : r.$$

§ 350. Слѣдствіе. Пусть C и c означаютъ окружности, а R и r соотвѣтственные имъ радіусы; мы доказали, что

$$C : R = c : r; \text{ отсюда } C : 2R = c : 2r.$$

Значитъ, отношеніе окружности круга къ своему діаметру во всѣхъ

кругахъ одинаково, т. е. *отношеніе окружности къ діаметру есть постоянная величина.* Отношеніе это принято означать греческою буквою π; слѣдовательно $\frac{C}{2R}=\pi$.

Замѣтимъ, что число π несоизмѣримое; впослѣдствіи мы объяснимъ возможность вычисленія π съ желаемою точностью; а теперь докажемъ, что π заключается между числами 3 и 4.

Число π не зависитъ отъ величины радіуса. Положимъ радіусъ равнымъ 1-цѣ; слѣд. діаметръ равенъ 2; а отношеніе окружности къ діаметру будетъ $\frac{1}{2}C=\pi$.

Окружность C больше периметра правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ; а онъ равенъ 6-ти, потому что бокъ этого многоугольника равенъ радіусу или 1-цѣ; съ другой стороны,— окружность меньше периметра описаннаго квадрата, бокъ же этого квадрата равенъ діаметру 2; слѣдовательно периметръ его равенъ 8. И такъ

$$C\begin{matrix}>6,\\<8;\end{matrix}\ \text{отсюда}\ \tfrac{1}{2}C,\ \text{или}\ \pi\begin{matrix}>3,\\<4.\end{matrix}$$

Предложеніе.

§ 351. *Длина окружности измѣряется произведеніемъ удвоеннаго ея радіуса на отношеніе π.* Мы назвали отношеніе окружности къ діаметру буквою π, слѣд.

$$\frac{C}{2R}=\pi,\ \text{отсюда}\ C=2\pi R.$$

Предложеніе.

§ 352. *Площадь круга измѣряется половиною произведенія окружности на радіусъ.*

Пусть S означаетъ площадь круга, а C и R его окружность и радіусъ; надобно доказать, что $S=\frac{1}{2}C\times R$.

Опишемъ правильный многоугольникъ около круга; пусть Q означаетъ его площадь, а P — периметръ, радіусъ R будетъ апоѳемою этого многоугольника. На основаніи § 296, получимъ

$$Q=\tfrac{1}{2}PR.$$

Намъ извѣстно (§ 348), что, если будетъ удваивать число боковъ описаннаго многоугольника, то разность между площадями Q

и S, а также и между периметромъ P и окружностью C, можетъ быть сдѣлана, въ обоихъ случаяхъ, меньше всякой данной величины; слѣдовательно можно положить

$$Q = S + \alpha,\ P = C + \beta,$$

гдѣ α и β — безконечно-малыя. Вставивъ эти величины въ предъидущее равенство, получимъ

$$S + \alpha = \frac{1}{2}CR + \frac{1}{2}R\beta.$$

Здѣсь S и $\frac{1}{2}CR$ суть постоянныя числа, α и $\frac{1}{2}R\beta$ — безконечно-малыя; а такое равенство влечетъ равенство постоянныхъ; слѣдовательно

$$S = \frac{1}{2}CR.$$

§ 353. *Слѣдствіе. Площадь круга измѣряется произведеніемъ квадрата его радіуса на π.*

Мы нашли

$$S = \frac{1}{2}CR.$$

Но, на основаніи § 351, $C = 2\pi R$; вставимъ это выраженіе для C въ предъидущее равенство, по сокращеніи, получимъ

$$S = \pi R^2.$$

§ 354. *Примѣчаніе.* Если въ кругѣ впишемъ правильный многоугольникъ и будемъ удваивать число боковъ, то бока этихъ многоугольниковъ будутъ уменьшаться и могутъ сдѣлаться меньше всякой величины, а периметры будутъ приближаться къ окружности. Основываясь на этомъ замѣчаніи, *окружность иногда принимаютъ за периметръ правильнаго многоугольника о безконечномъ числѣ боковъ.* При такомъ взглядѣ на окружность, приписываютъ ей всѣ тѣ свойства правильныхъ многоугольниковъ, которыя не зависятъ отъ числа боковъ. Напр. периметры правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа боковъ, пропорціональны радіусамъ круговъ; притомъ, пропорціональность эта имѣетъ мѣсто при *всякомъ числѣ боковъ*, т. е. она не зависитъ отъ числа боковъ; а какъ окружности можно принять за правильные многоугольники о безконечномъ числѣ боковъ, то окружности пропорціональны радіусамъ.

Площадь правильнаго многоугольника измѣряется половиною его периметра на радіусъ круга вписаннаго (§ 296). Выраженіе это не зависитъ отъ числа боковъ; слѣдовательно площадь круга измѣряется половиною окружности на радіусъ.

Надо замѣтить, что хотя, при указанномъ взглядѣ на окружность, всегда приходимъ къ вѣрнымъ результатамъ; но въ сущности окружность не есть ломанная линія; а потому мы должны приводить строгія доказательства; а на замѣчаніе настоящаго § можно смотрѣть, какъ на средство, облегчающее память.

Предложеніе.

§ 355. *Площади круговъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ.*

Пусть S и s означаютъ площади двухъ круговъ, C и c — ихъ окружности, а R и r — радіусы. Надо доказать, что $S : s = R^2 : r^2$. Извѣстно (§ 352), что

$$S = \frac{1}{2}CR, \quad s = \frac{1}{2}cr;$$

отсюда, раздѣливъ первое равенство на второе, получимъ

$$\frac{S}{s} = \frac{C}{c} \times \frac{R}{r}.$$

Но окружности пропорціональны своимъ радіусамъ (§ 349), слѣд.

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r};$$

вставивъ, вмѣсто перваго изъ этихъ отношеній, ему равное въ предпослѣднее равенство, получимъ

$$\frac{S}{s} = \frac{R}{r} \times \frac{R}{r}, \text{ или } \frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}.$$

§ 356. Пусть D и d означаютъ діаметры круговъ; такъ какъ діаметръ вдвое больше радіуса, то $D : d = R : r$ и $D^2 : d^2 = R^2 : r^2$; слѣдовательно $\frac{S}{s} = \frac{D^2}{d^2}$, т. е. *площади круговъ пропорціональны квадратамъ діаметровъ.*

Предложеніе.

§ 357. *Площади секторовъ одного и того же круга или круговъ описанныхъ равными радіусами, пропорціональны длинамъ соотвѣтственныхъ имъ дугъ.*

Предложеніе это есть прямое слѣдствіе теоремы о пропорціональности величинъ (§ 336); въ самомъ дѣлѣ, во 1-хъ, съ

увеличенiемъ дуги, увеличивается соотвѣтствующiй ей секторъ; во 2-хъ, если дуга увеличится въ 2, 3 и т. д. раза, то и соотвѣтствующiй ей секторъ увеличится во столько же разъ; потому что секторы одного круга, соотвѣтствующiе равнымъ дугамъ, очевидно, совмѣщаются.

Предложенiе.

§ 358. *Площадь сектора измѣряется произведенiемъ половины длины соотвѣтствующей дуги на длину радiуса.*

Пусть A означаетъ площадь сектора, a — соотвѣтствующую ему дугу, R — радiусъ; надобно доказать, что $A=\frac{1}{2}aR$.

Означимъ буквами S и C соотвѣтственно площадь круга и окружность, описанную тѣмъ же радiусомъ R. Сравнимъ секторъ A съ секторомъ $\frac{1}{4}S$; этому послѣднему сектору будетъ соотвѣтствовать дуга $\frac{1}{4}C$. На основанiи предъидущаго параграфа, получимъ

$$A:\frac{S}{4}=a:\frac{C}{4};\ \text{отсюда}\ A=a\frac{S}{C};$$

но намъ извѣстно, что площадь круга $S=\frac{1}{2}CR$; слѣд. $A=\frac{1}{2}aR$.

§ 359. *Дуги круга, а также секторы, называются подобными, если соотвѣтственные имъ центральные углы равны между собою.*

Предложенiе.

§ 360. *Подобныя дуги пропорцiональны радiусамъ.*

Пусть A и a означаютъ дуги, заключающiяся между боками угла M и описанныя радiусами R и r; надо доказать, что дуг. A : дуг. $a=R:r$. Пусть C и c означаютъ окружности, описанныя этими радiусами. Извѣстно, что центральные углы одного и того же круга пропорцiональны соотвѣтственнымъ имъ дугамъ; поэтому, назвавъ буквою D прямой уголъ, которому соотвѣтствуетъ въ первомъ кругѣ дуга $\frac{1}{4}C$, а во второмъ $\frac{1}{4}c$, получимъ

$$M:D=A:\tfrac{1}{4}C$$

и

$$M:D=a:\tfrac{1}{4}c;$$

по равенству первыхъ отношенiй этихъ пропорцiй, получимъ

$$A:\tfrac{1}{4}C=a:\tfrac{1}{4}c;$$

отсюда

$$A:a=C:c;$$

но окружности пропорціональныя радіусамъ, т. е. $C:c = R:r$; поэтому

$$A:a = R:r.$$

Предложеніе.

§ 361. *Площади подобныхъ секторовъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ.*

Назвавъ буквами S, A и R площадь сектора, дугу (основаніе) и радіусъ, а буквами s, a и r такія же величины другаго сектора, подобнаго первому, получимъ

$$S = \tfrac{1}{2}AR,\ s = \tfrac{1}{2}ar;$$

отсюда

$$\frac{S}{s} = \frac{A}{a} \times \frac{R}{r};$$

а вслѣдствіе подобія дугъ, имѣемъ $A:a = R:r$; слѣд.

$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Предложеніе.

§ 362. *Площадь круга, построеннаго на ипотенузѣ, равномѣрна суммѣ площадей круговъ, построенныхъ на катетахъ.*

Фиг. 216-я.

Принявъ бока прямоугольнаго треугольника ABC за діаметры, опишемъ круги; для краткости пусть Q, P и R означаютъ площади круговъ, которыхъ діаметры соотвѣтственно равны ипотенузѣ AB и катетамъ BC и AC. Площади круговъ пропорціональны квадратамъ діаметровъ (§ 356); а потому имѣемъ

$$P:R = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2;$$

отсюда

$$(P+R):R = (\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2):\overline{AC}^2;$$

но и

$$Q:R = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

Въ послѣднихъ двухъ пропорціяхъ три члена одной равны тремъ членамъ другой (§ 256); слѣдовательно и остальные члены равны, т. е. $Q = P + R$.

§ 363. *Примѣчаніе.* Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что площадь полукруга $ASCTB$ равномѣрна суммѣ пло-

щадей полукруговъ AMC и CNB; отнявъ отъ обѣихъ частей общіе имъ сегменты ASC и BTC, найдемъ, что площадь треугольника ABC равномѣрна суммѣ площадей луночекъ $AMCSA$ и $BNCTB$.

Луночки эти называются *ипократовыми*, по имени греческаго геометра, жившаго въ V вѣкѣ до Р. Х., который первый доказалъ равномѣрность суммы луночекъ и площади прямоугольнаго треугольника.

---

17. Показать возможность вычисленія по приближенію отношенія окружности къ діаметру.—По данному радіусу найти окружность и площадь круга; по данной окружности или по данной площади круга найти радіусъ.

Вопросъ.

§ 364. *Показать возможность вычисленія по приближенію отношенія окружности къ діаметру.*

Мы уже замѣтили, что отношеніе окружности къ діаметру (принято обозначать буквою π) есть постоянная величина для всѣхъ круговъ; поэтому для отысканія отношенія окружности къ діаметру достаточно изъ всѣхъ круговъ выбрать одинъ и найти для него это отношеніе. Изберемъ кругъ, въ которомъ радіусъ равенъ единицѣ. Для такого круга отношеніе окружности къ діаметру будетъ (§ 350)

$$\pi = \frac{C}{2} \ldots\ldots (1).$$

Это равенство показываетъ, что для нахожденія π, надо найти длину окружности, принимая радіусъ за 1-цу, и раздѣлить ее на 2.

Для отысканія длины окружности по приближенію опредѣляютъ периметры подобныхъ правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около круга, помощію формулъ, изложенныхъ въ §§ 321 и 322.

При радіусѣ $r = 1$ формула, опредѣляющая бокъ описаннаго правильнаго многоугольника по данному боку a вписаннаго, подобнаго ему многоугольника (§ 321), обратится въ

$$\frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}} \ldots\ldots (2);$$

а формула, опредѣляющая, по данному боку a, вписаннаго правильнаго многоугольника, бокъ вписаннаго правильнаго многоугольника, имѣющаго вдвое больше сторонъ (§ 322), обратится въ

$$\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}} \ldots\ldots (3).$$

Впишемъ въ кругѣ, котораго радіусъ 1-ца, правильный шестисторонникъ, — бокъ его равенъ 1-цѣ, а периметръ 6-ти, и опишемъ подобный ему многоугольникъ. Бокъ этого многоугольника найдется по формулѣ (2), полагая $a=1$, а умноживъ его на 6-ть, получимъ периметръ описаннаго правильнаго шестисторонника.

Положимъ $a=1$ въ формулѣ (3); получимъ бокъ, а отсюда и периметръ правильнаго двѣнадцатисторонника, вписаннаго въ кругѣ. Вставивъ во (2) формулу найденную такимъ образомъ величину для бока вписаннаго 12-ти-сторонника, получимъ бокъ, а слѣдовательно и периметръ правильнаго 12-ти-сторонника описаннаго.

Продолжая такое постепенное вычисленіе, найдемъ периметры правильныхъ 24-хъ-сторонниковъ, вписаннаго и описаннаго, потомъ периметры 48, 96 и т. д. — сторонниковъ правильныхъ, вписаннаго и описаннаго; и какъ всегда можно найти такіе правильные многоугольники, одинаковаго числа боковъ, одинъ вписанный, другой описанный, что разность между ихъ периметрами можно сдѣлать менѣе всякой данной величины (§ 344), то эту разность можно сдѣлать, напримѣръ, меньше $^1/_{100}$; этого мы достигнемъ, когда у обоихъ периметровъ будутъ одинаковыя цифры цѣлыхъ, десятыхъ и сотыхъ. Окружность C заключается между этими периметрами, — она больше вписаннаго и меньше описаннаго; слѣдовательно разность между окружностью и каждымъ периметромъ будетъ меньше $^1/_{100}$; поэтому общія цифры периметровъ составятъ приближеніе окружности C съ точностью до $^1/_{100}$. Раздѣливъ это приближеніе на 2, получимъ π, на основаніи (1) формулы, съ точностью до $^1/_{100}$. Такимъ образомъ возможно вычислить π съ какою угодно точностью.

Результатъ упомянутыхъ вычисленій можно видѣть изъ слѣдующей таблицы:

Число сторонъ многоугольника.	Полупериметръ вписаннаго многоугольника.	Полупериметръ описаннаго многоугольника.
6	3,00000 . . .	3,46410 . . .
12	3,10582 . . .	3,21540 . . .
24	3,13262 . . .	3,15967 . . .
48	3,13935 . . .	3,14608 . . .
96	3,14103 . . .	3,14271 . . .
и т. д.	и т. д.	и т. д.

Отсюда видно, что общія цифры для полупериметровъ о 96-ти сторонахъ правильныхъ вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, т. е. 3,14 будутъ принадлежать π — отношенію окружности къ діаметру, съ точностью до 0,01.

Примѣчаніе 1. До *Архимеда* (287 — 212 г. до Р. Х.) не было вычислено отношеніе окружности къ діаметру; онъ нашелъ, что π заключается между $3^{10}/_{70}$ и $3^{10}/_{71}$ или, по приведеніи дробей къ одному знаменателю, между $3^{71}/_{497}$ и $3^{70}/_{497}$; и такъ $3^{1}/_{7}$ или $^{22}/_{7}$ составляетъ приближеніе π, съ точностью до $^{1}/_{497}$, и больше настоящей величины.

Адріанъ Мецій нашелъ болѣе точную величину, $\pi = {}^{355}/_{113}$. Его легко запомнить: напишите по два раза сряду каждое изъ первыхъ нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, получимъ 113355 и отдѣлите 113 и 355; числа эти будутъ членами дроби, выражающей Меціево отношеніе окружности къ діаметру.

На основаніи высшаго анализа, вычисленіе π доведено до 530 десятичныхъ знаковъ: изъ нихъ 330 цифръ можно считать вѣрными, потому что онѣ вышли одинаковыми у трехъ математиковъ *). Вотъ первыя десять цифръ:

$$\pi = 3,1415926535\ldots.$$

Приводимъ и обратное количество для π, т. е. $\frac{1}{\pi}$, а также и логариѳмъ π; количества эти часто встрѣчаются въ приложеніяхъ

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\,98861\ldots.$$

$$\log\,\pi = 0,49714\,98726\ldots.$$

*) См. *Nouvelles annales de mathématique*, par Tirquem, 1856.

Обративъ архимедово отношеніе $^{22}/_{7}$ и мецієво $^{355}/_{113}$ въ десятичныя дроби и сравнивъ ихъ съ вышеприведеннымъ приближеніемъ, выраженнымъ въ десятичныхъ доляхъ, найдемъ, что $^{22}/_{7}$ и $^{355}/_{113}$ оба больше π, — первое точно до сотой, а второе до милліонной доли.

Объ отношеніяхъ Архимеда и Меція упоминаемъ, какъ замѣчательныхъ въ исторіи математики; для вычисленія же всегда берется приближеніе въ десятичныхъ доляхъ, ограничиваясь однимъ, двумя, тремя и т. д. десятичными знаками, смотря по цѣли вычисленія.

Вопросъ.

§ 365. *По данному радіусу окружности вычислить длину окружности и площадь круга.*

Намъ извѣстно (§§ 351, 353), что

$$C = 2\pi R,\quad S = \pi R^2,$$

гдѣ радіусъ R извѣстенъ, извѣстно тоже π, слѣд. можно вычислить $2\pi R$ и πR^2, т. е. длину окружности и площадь круга, конечно по приближенію. Отношеніе π всегда берется въ десятичныхъ доляхъ, чѣмъ большее число цифръ возьмемъ для π, тѣмъ точнѣе будутъ выводы для длины окружности и площади круга.

Пусть, напримѣръ, $R = 10$ дюймамъ, а для π взяли 3,14, т. е. величину точную до $^1/_{100}$ и меньшую настоящей, тогда

$$C = (2 \cdot 3{,}14 \cdot 10) \text{ д. или } 62{,}8 \text{ дюйма};$$

такъ какъ погрѣшность въ π меньше $^1/_{100}$, то погрѣшности въ $3{,}14 \cdot 20$ будетъ меньше $^{20}/_{100}$ или $^1/_5$ дюйма.

$$S = 3{,}14 \cdot 10^2 \text{ или } S = 314 \text{ кв. д.}$$

съ точностью до $^1/_{100} \times 100$ или до 1 кв. дюйма.

Вопросъ.

§ 366. *По данной окружности, или по данной площади круга, — найти радіусъ.*

1) Пусть дана окружность C въ линейныхъ единицахъ. Изъ формулы $C = 2\pi R$ (§ 365) имѣемъ

$$R = \frac{C}{2\pi}.$$

Например: $C = 60$ дюймамъ; получимъ

$$R = 30 \cdot \frac{1}{\pi} = 30 \cdot 0{,}318;$$

произведя умноженіе, получимъ 9,54; множитель 0,318, взятый вмѣсто $\frac{1}{\pi}$, точенъ до 0,001 (§ 364, прим.), слѣд. произведеніе 9,54 точно до $0{,}001 \cdot 30$ или до 0,03, и меньше истинной величины; поэтому 9,5 будетъ приближеніе точное до $0{,}03 + 0{,}04 = 0{,}07$, которое меньше 0,1. И такъ, длина радіуса равна 9,5 дюйма съ точностью до 0,1 и меньше истинной величины.

2) Дана площадь круга S. Изъ формулы $S = \pi R^2$ (§ 365) имѣемъ

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Напримѣръ, $S = 300$ кв. дюйм.; получимъ

$$R = \sqrt{\frac{300}{\pi}} = \sqrt{300 \, . \, \frac{1}{\pi}}.$$

Вмѣсто $\frac{1}{\pi}$ возьмемъ приближеніе 0,31830 (§ 364, прим.), получимъ

$$R = \sqrt{300 \, . \, 0{,}3180} \text{ или } R = \sqrt{95{,}490}.$$

Произведеніе $300 \cdot 0{,}31830$ точно до $0{,}00001 \cdot 300$ или до 0,003, и подавно оно точно до 0,01; поэтому, по извлеченіи квадратнаго корня изъ 95,49 съ точностью до 0,1 получимъ 9,7. И такъ, длина радіуса равна 9,7 дюймамъ съ точностью до 0,1 дюйма.

Вопросъ.

§ 367. *Вычислить длину дуги, по извѣстнымъ радіусу и числу градусовъ, заключающихся въ дугѣ.*

Означимъ буквами R и n длину радіуса и число градусовъ дуги, а буквою l длину этой дуги.

Длина дуги въ 180°, описанной радіусомъ R, т. е. длина полуокружности равна πR (§ 351); поэтому длина дуги въ 1° равна $\frac{\pi R}{180}$, слѣд. длина дуги въ n градусовъ, при радіусѣ R,

будетъ

$$l = \frac{\pi R n}{180} \dots . (1).$$

Напримѣръ, если $R = 1$ дюйм., $n = 30^\circ$, то

$$l = \left(\frac{\pi \cdot 30}{180}\right) \text{ д. или } \frac{\pi}{60} \text{ дюйм.};$$

раздѣливъ 3,14... на 60, получимъ 0,05 дюйм. съ точностью до 0,01 дюйма.

Изъ формулы (1) имѣемъ

$$n = \frac{180 l}{\pi R} \dots . . (2)$$

$$R = \frac{180 l}{\pi n} \dots . . (3)$$

Формула (2) даетъ возможность опредѣлить число градусовъ дуги, когда извѣстны длина этой дуги и ея радіусъ.

Для примѣра найдемъ число градусовъ дуги, которой длина равна радіусу, т. е. въ формулѣ (2) положимъ $l = R$, получимъ

$$n = \frac{180}{\pi} = 180^\circ \times 0{,}31830\ 98861\dots$$

Получимъ $n = 57^\circ 17' 44'',8$.

По формулѣ (3) опредѣлится длина радіуса по извѣстнымъ длинѣ дуги и числу градусовъ, заключающихся въ ней.

Напримѣръ: длина дуги въ 45° равна 1 дюйму; опредѣлить длину радіуса

$$R = \left(\frac{180}{\pi 45}\right) \text{ д.} = \frac{4}{\pi} \text{ д.} = 4 \times 0{,}3183\dots \text{ д.} = 12{,}73\dots \text{ д.}$$

съ точностью до 0,01 дюйма.

§ 368. Пусть x означаетъ бокъ квадрата, равномѣрнаго площади круга; слѣд. $x^2 = C \times \frac{R}{2}$;

отсюда $C : x = x : \frac{R}{2}$.

И такъ, чтобы кругъ обратить въ равномѣрный ему квадратъ, надобно найти среднюю пропорціональную между окружностью и половиною радіуса; но окружность C опредѣляется не иначе, какъ по приближенію; слѣд. и бокъ квадрата найдется только по приближенію. И такъ, вопросъ о замѣненіи круга равномѣрнымъ ему квадратомъ можетъ быть рѣшенъ только по приближенію. Въ исторіи математики вопросъ о превращеніи круга въ квадратъ извѣстенъ подъ названіемъ *квадратуры круга*.

ЧАСТЬ II.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

(СТЕРЕОМЕТРІЯ).

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ.

Прямыя линіи, разсматриваемыя въ пространствѣ, и плоскости. — Двугранные и многогранные углы.

18. Плоскость. — Условія, опредѣляющія ея положеніе. — Взаимное пересѣченіе двухъ и трехъ плоскостей. — Перпендикуляры къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ.

§ 369. До сихъ поръ мы разсматривали протяженія на одной плоскости, и потому объемы не могли подлежать нашему изслѣдованію, а разсматривались только линіи и площади. Мы показали свойства прямыхъ линій, перпендикулярныхъ и параллельныхъ, способы измѣренія прямой линіи и окружности, свойства многоугольниковъ и круговъ, а также показали способы нахожденія ихъ площадей; пропорціональность величинъ дала намъ возможность, при измѣреніи угловъ, окружности и площадей, устранить наложеніе единицы въ измѣряемой величинѣ; безъ пропорціональности мы встрѣтили бы непреодолимое затрудненіе; напримѣръ, какъ квадратъ, принятый за единицу, укладывать въ треугольникѣ, параллелограммѣ или кругѣ—для узнанія ихъ площадей? А также: какъ укладывать линейную 1-цу въ окружности для измѣренія ея длины? Все это устранено пропорціональностью величинъ; ею же мы будемъ пользоваться при измѣреніи объемовъ.

Чтобы при дальнѣйшемъ изслѣдованіи протяженій можно было пользоваться геометріею на плоскости, надобно знать признаки,

по которымъ можно опредѣлить, будутъ ли данныя протяженія лежать въ одной плоскости.

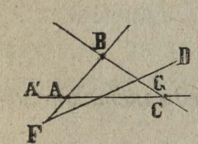
Признаки эти изложены въ слѣдующихъ трехъ предложеніяхъ.

Предложеніе.

§ 370. *Три точки, лежащія не на прямой линіи, опредѣляютъ положеніе плоскости, т. е. черезъ эти точки можно провесть плоскость, и при томъ только одну.*

Пусть даны три точки A, B и C. Двѣ изъ нихъ, напримѣръ A и B, соединимъ прямою линіей. Черезъ прямую AB можно провесть плоскость (§ 17) и обращать ее на этой линіи.

Фиг. 217-я.



Плоскость необходимо должна встрѣтить точку C, потому что плоскость полагается безконечно продолженною; и такъ, черезъ три точки A, B и C можно провесть плоскость. Назовемъ ее буквою M, и положимъ, что черезъ эти же точки проходитъ другая плоскость, которую назовемъ N. Возьмемъ какую нибудь точку D на плоскости N, и докажемъ, что она лежитъ и на плоскости M. Три точки A, B и C, по условію, лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ; поэтому и прямыя AB, BC и AC, неопредѣленно продолженныя, лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ (§ 17). Прямая BC дѣлитъ плоскость N на двѣ части: точка D находится въ одной части; въ другой части, на прямой AB, возьмемъ какую нибудь точку F и соединимъ ее съ D прямою FD; эта послѣдняя пересѣчетъ BC въ точкѣ G; ибо всѣ прямыя находятся въ плоскости N. Такъ какъ точки F и G находятся на прямыхъ AB и BC, то онѣ лежатъ также въ плоскости M, и всѣ точки неопредѣленной прямой FG, а слѣдовательно и точка D, лежатъ въ плоскости M. И такъ всякая точка плоскости N лежитъ и на плоскости M; слѣдовательно эти плоскости составляютъ одну, и положеніе плоскости, какъ единственной, вполнѣ опредѣлено.

Предложеніе.

§ 371. *Двѣ пересѣкающіяся прямыя опредѣляютъ положеніе плоскости.*

Пусть даны двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи *AB* и *CD*. Возьмемъ двѣ точки *A* и *C* на прямыхъ *AB* и *CD*. Черезъ эти точки и пересѣченіе *O*, какъ лежащія не на одной прямой, можно провесть плоскость (§ 370); она будетъ содержать и прямыя *AB* и *CD*, ибо каждая изъ нихъ будетъ имѣть двѣ общія точки съ плоскостью, *A* и *O*, *C* и *O*. Всякая другая плоскость, проходящая черезъ эти прямыя, сольется съ первою плоскостью; потому что у нихъ будутъ три общія точки, напримѣръ *A*, *B* и *C*, лежащія не на одной прямой.

Фиг. 4-я.

§ 372. Слѣдствіе. *Прямая линія и точка, внѣ ея, опредѣляютъ положеніе плоскости.* Объясненіе то же, что и въ предъидущемъ параграфѣ.

Предложеніе.

§ 373. *Двумя параллельными прямыми опредѣляется положеніе плоскости.*

Дѣйствительно, двѣ параллельныя линіи, по самому опредѣленію ихъ, лежатъ въ одной плоскости; а всякая другая плоскость, проведенная черезъ эти линіи, сольется съ первою, потому что у нея съ первою плоскостью будутъ три общія точки не на прямой линіи, напримѣръ, двѣ точки на одной и третья на другой изъ параллельныхъ.

§ 374. Прямая линія относительно плоскости можетъ имѣть три различныя положенія:

1) или *прямая вся лежитъ на плоскости;*

2) или *пересѣкаетъ ее,* — причемъ пересѣченіе составитъ одну точку; въ противномъ случаѣ, при двухъ общихъ точкахъ, или больше, прямая совпала бы съ плоскостью (§ 17); точка эта называется *основаніемъ* прямой.

3) или прямая находится вся внѣ плоскости на всемъ протяженіи той или другой, сколько бы ихъ не продолжали; такая прямая называется *параллельною къ плоскости.*

Предложеніе.

§ 375. *Взаимное пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.*

И дѣйствительно, еслибъ общее пересѣченіе двухъ плоскостей не была прямая, то нашлись бы на пересѣченіи три точки, расположенныя не на одной прямой; слѣдовательно обѣ плоскости, имѣя три общія точки, не на одной прямой, составили бы одну плоскость (§ 370) и, значитъ, не пересѣкались бы, что противно условію.

Предложеніе.

§ 376. *Взаимное пересѣченіе трехъ плоскостей, вообще, есть точка, но можетъ быть и прямая линія.*

Дѣйствительно, чтобы получить взаимное пересѣченіе трехъ плоскостей, надобно взаимное пересѣченіе двухъ плоскостей пересѣчь третьею плоскостью; а извѣстно (§ 373, 2-е), что сѣченіе прямой линіи съ плоскостью составитъ точку.

Впрочемъ третья плоскость можетъ пройти черезъ сѣченіе первыхъ двухъ плоскостей, и тогда взаимное сѣченіе трехъ плоскостей будетъ прямая линія.

§ 377. Черезъ прямую линію можно провесть множество плоскостей, и эта прямая, очевидно, будетъ общимъ ихъ сѣченіемъ. Если черезъ какую нибудь точку этой прямой вообразимъ перпендикуляры къ ней въ каждой плоскости, то получимъ столько перпендикуляровъ въ пространствѣ, сколько было проведено плоскостей. И такъ, *въ пространствѣ можно провесть множество перпендикуляровъ къ прямой, проходящихъ черезъ одну какую нибудь точку прямой.*

---

19. **Перпендикуляры къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости.—Перпендикуляръ къ плоскости. — Черезъ каждую точку можно провести къ прямой перпендикулярную къ ней плоскость, и только одну.—Свойство перпендикуляра къ плоскости и линій къ ней наклонныхъ.**

Предложеніе.

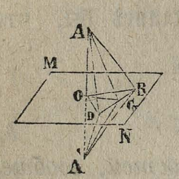
§ 378. *Всѣ перпендикуляры къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости.*

Пусть дана прямая AA' и на ней точка O; черезъ прямую AA' проведемъ двѣ плоскости, и въ каждой изъ точки O возставимъ къ прямой AA' перпендикуляры OB и OD; они находятся въ одной плоскости MN (§ 371). Черезъ прямую AA'

14

проведемъ третью плоскость, которая пересѣчетъ плоскость MN по линіи OG; докажемъ, что это сѣченіе OG перпендикулярно къ AA'. Но какъ въ одной плоскости изъ точки можно возставить одинъ только перпендикуляръ, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажется, что перпендикуляръ, возставленный въ этой третьей плоскости изъ O къ прямой AA', совпадаетъ съ OG, и слѣдовательно онъ лежитъ въ плоскости MN. Разсѣчемъ линіи OB, OG и OD прямою BD; точки пересѣченія B, G и D соединимъ съ какою нибудь точкою A прямой AA', а также и съ другою точкою A', находящеюся на такомъ разстояніи отъ O, на какомъ точка A находится отъ O, т. е. $OA = OA'$. Въ плоскости ABA' прямая OB перпендикулярна къ AA' и проходитъ черезъ ея середину O; поэтому $AB = A'B$; по той же причинѣ, въ плоскости ADA', $AD = A'D$. И такъ въ треугольникахъ ABD и $A'BD$ три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго; слѣдовательно сходственные углы равны, т. е. уголъ $ABG = A'BG$. Въ треугольникахъ ABG и $A'BG$ между равными сторонами, $AB = A'B$, BG общая, лежатъ равныя углы $ABG = A'BG$; слѣдовательно и остальныя сходственныя стороны равны, $AG = A'G$. Наконецъ въ треугольникахъ AGO и $A'GO$ всѣ стороны, порознь, равны: $AG = A'G$, $AO = A'O$ и GO общая; поэтому и сходственные углы равны, $AOG = A'OG$; значитъ OG перпендикулярна AA', и обратно AA' перпендикулярна къ OG. Такъ какъ третья плоскость проведена черезъ $A'A$ совершенно произвольно, то можно сказать, что всѣ перпендикуляры къ прямой $A'A$, проведенные черезъ точку O, находятся въ плоскости MN.

Фиг. 218-я.



§ 379. *Примѣчаніе.* Мы знаемъ, что прямыя, находящіяся на одной плоскости, могутъ не пересѣкаться, и тогда онѣ непремѣнно параллельны. О линіяхъ въ пространствѣ нельзя сдѣлать такого заключенія; *въ пространствѣ прямыя могутъ не пересѣкаться и въ тоже время быть непараллельными;* напримѣръ (фиг. 218) прямая AA' не пересѣкаетъ прямой BD, проведенной въ плоскости MN, притомъ эти двѣ прямыя не параллельны.

§ 380. *Плоскость, содержащая всѣ перпендикуляры къ прямой, въ какой ни есть ея точкѣ, называется плоскостью, перпендикулярною къ прямой въ этой точкѣ.* И обратно:

Перпендикуляромъ къ плоскости называется прямая линія, перпендикулярная ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ черезъ ея основаніе по этой плоскости.

§ 381. Чтобы убѣдиться, что прямая линія перпендикулярна къ плоскости, достаточно доказать, что *она перпендикулярна только къ двумъ прямымъ, проведеннымъ въ плоскости черезъ ея основаніе.*

И дѣйствительно, доказывая предложеніе § 378, мы видѣли, что когда прямая OA перпендикулярна къ двумъ прямымъ OB и OD, проведеннымъ на плоскости MN, черезъ ея основаніе O, то она перпендикулярна и ко всякой линіи OG, проведенной въ той же плоскости MN черезъ основаніе O.

Также и плоскость, содержащая два перпендикуляры къ прямой въ данной ея точкѣ, содержитъ всѣ перпендикуляры къ прямой въ этой точкѣ, а стало быть она перпендикулярна къ прямой въ той же точкѣ.

Предложеніе.

§ 382. *Черезъ каждую точку прямой можно провесть перпендикулярную къ ней плоскость, и только одну.*

Черезъ данную прямую проведемъ двѣ какія нибудь плоскости, и въ каждой изъ нихъ возставимъ перпендикуляръ къ этой прямой изъ данной точки; плоскость, проходящая черезъ эти перпендикуляры, будетъ перпендикулярна къ прямой (§ 381). И такъ, черезъ каждую точку прямой всегда можно провесть перпендикулярную къ ней плоскость.

Положимъ, что существуетъ другая плоскость также перпендикулярная къ прямой въ той же точкѣ; она должна заключать всѣ перпендикуляры, возставленные къ прямой черезъ данную точку (§ 380); и слѣдовательно она пройдетъ черезъ первые два перпендикуляра, стало быть совмѣстится съ первою плоскостью, потому что двумя пересѣкающимися прямыми опредѣляется положеніе плоскости.

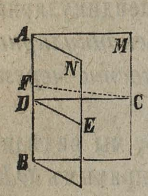
Предложеніе.

§ 383. *Черезъ всякую точку, лежащую внѣ прямой, можно провести къ ней перпендикулярную плоскость, и только одну.*

1) Пусть дана прямая AB и точка C, внѣ ея; требуется

провести черезъ точку C плоскость, перпендикулярную къ прямой AB. Черезъ точку C и прямую AB вообразимъ плоскость M; въ этой плоскости изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на AB. Вообразимъ какую нибудь плоскость N, проходящую черезъ прямую AB, въ этой плоскости проведемъ DE перпендикулярно къ AB. Наконецъ черезъ пересѣкающіяся прямыя CD и DE вообразимъ плоскость: она пройдетъ черезъ данную точку C (§ 17) и будетъ перпендикулярна къ CD (§ 381).

Фиг. 219-я.



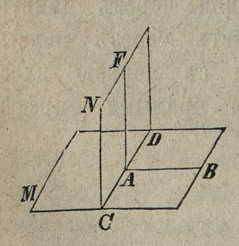
2) Допустимъ, что черезъ точку C, кромѣ плоскости CDE, проведена другая плоскость, также перпендикулярная къ прямой AB. Пусть эта плоскость пересѣкаетъ прямую AB въ точкѣ F; соединивъ точку F съ C, получимъ прямую CF, перпендикулярную къ AB (§ 380). И такъ, въ плоскости M изъ точки C опущены два перпендикуляра CD и CF на прямую AB; такой невѣрный выводъ произошелъ отъ невѣрнаго предположенія, что черезъ точку C, лежащую внѣ прямой AB, проведена другая плоскость, кромѣ плоскости CDE, перпендикулярная къ прямой AB, слѣд. и проч.

Предложеніе.

§ 384. *Изъ каждой точки плоскости можно возставить къ ней перпендикуляръ, и только одинъ.*

1) Пусть точка A лежитъ на плоскости M, и требуется изъ нея возставить перпендикуляръ къ этой плоскости. Черезъ точку A, въ плоскости M, проведемъ произвольную прямую AB, а къ ней, въ точкѣ A, перпендикулярную плоскость N (§ 382); пересѣченіе ея CD съ данною плоскостью пройдетъ черезъ точку A, общую обѣимъ плоскостямъ; затѣмъ въ плоскости N возставимъ перпендикуляръ AF къ сѣченію CD, — это и будетъ искомый перпендикуляръ. Въ самомъ дѣлѣ, плоскость N проведена перпендикулярно къ прямой AB; слѣд. и обратно, прямая AB перпендикулярна къ плоскости N (§ 380); значитъ AB перпендикулярна и къ AF, какъ и ко всякой прямой, проведенной по плоскости N черезъ A. И такъ, прямая AF, будучи перпенди-

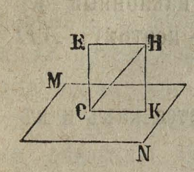
Фиг. 220-я.



кулярна къ двумъ прямымъ AB и CD, проведеннымъ по плоскости M, необходимо перпендикулярна и къ самой плоскости M (§ 381).

2) Допустимъ, что изъ точки C, принадлежащей плоскости MN, можно возставить къ ней два перпендикуляра CF и CH.

Фиг. 221-я.



Плоскость, проведенная черезъ эти перпендикуляры, пересѣчетъ плоскость MN по линіи CK, которая пройдетъ черезъ точку C; прямая CK перпендикулярна къ CF и CH, потому что обѣ эти линіи перпендикулярны къ плоскости MN; слѣдовательно онѣ перпендикулярны и къ прямой CK, проведенной по плоскости MN черезъ основаніе C (§ 381). И такъ, въ плоскости $FHKC$ къ прямой CK, изъ одной точки C, возставлено два перпендикуляра; несправедливость этого вывода показываетъ, что предположеніе наше о возможности двухъ перпендикуляровъ CF и CH, — невозможно.

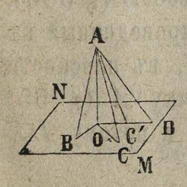
§ 385. Прямая, пересѣкающая плоскость и не перпендикулярная къ ней, называется *наклонною* къ плоскости. Точка пересѣченія наклонной съ плоскостью называется *основаніемъ* наклонной.

Предложеніе.

§ 386. *Если изъ какой нибудь точки перпендикуляра къ плоскости провести наклонныя, то* 1) *перпендикуляръ короче всякой наклонной*; 2) *тѣ наклонныя къ плоскости, которыхъ основанія равно-удаленны отъ основанія перпендикуляра, равны между собою*; 3) *изъ двухъ наклонныхъ къ плоскости, основанія которыхъ неравно удаленны, та больше, которой основаніе отстоитъ дальше отъ основанія перпендикуляра.*

Пусть прямая AO перпендикулярна къ плоскости MN, и точки B, C, C', D и O лежатъ въ плоскости MN.

Фиг. 222-я.



1) Докажемъ, что $AO < AB$. Прямая AO перпендикулярна къ плоскости MN; слѣдовательно она перпендикулярна и къ прямой OB, проведенной въ этой плоскости черезъ основаніе O (§ 380); и такъ, въ плоскости ABO, изъ точки O проведены перпендикуляръ AO къ OB и наклонная къ ней AB; слѣдовательно $AO < AB$.

2) Пусть $OB = OC$; докажемъ, что $AB = AC$. Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ABO и ACO, $BO = CO$, AO общая, и углы между этими сторонами прямые; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны, т. е. $AB = AC$.

3) Если $OD > OB$, то $AD > AB$. Отложимъ $OC' = OB$, и проведемъ AC'; тогда въ плоскости AOD наклонная AD больше AC' (§ 50); но $AC' = AB$, ибо эти наклонныя къ плоскости равно удалены отъ основанія O, — поэтому AD больше AB.

Примѣчаніе. Предложеніе обратное доказывается какъ и въ планиметріи подобное предложеніе (§ 51).

---

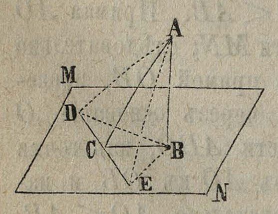
20. Теорема трехъ перпендикуляровъ.—Линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама къ ней перпендикулярна. — Изъ точки внѣ плоскости можно опустить на послѣднюю только одинъ перпендикуляръ. — Перпендикуляры къ плоскости всѣ между собою параллельны. — Линіи, параллельныя одной и той же прямой, параллельны между собою.

Предложеніе.

§ 387. *Если черезъ основаніе B перпендикуляра AB къ плоскости MN провести въ ней перпендикуляръ BC къ произвольной прямой DE, то эта прямая будетъ перпендикулярна къ прямой CA, соединяющей основаніе втораго перпендикуляра съ какою нибудь точкою A перваго перпендикуляра.*

Пусть AB перпендикулярна къ плоскости MN, BC перпендикулярна къ какой нибудь прямой DE, лежащей въ плоскости MN; надо доказать, что DE перпендикулярна къ CA. Отложимъ равныя части $CE = CD$ и соединимъ точки D и E съ точками A и B. Въ плоскости MN получимъ равныя наклонныя $BD = BE$ (§ 50); поэтому и наклонныя AD и AE къ плоскости равны между собою (§ 386); значитъ перпендикуляръ, проведенный къ прямой DE, изъ точки C, въ плоскости ADE, пройдетъ черезъ точку A (§ 55) и совпадетъ съ прямою CA и потому DE перпендикулярна къ CA.

Фиг. 223-я.



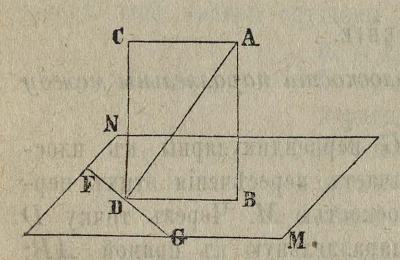
Предложеніе.

§ 388. *Линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама къ ней перпендикулярна.*

Положимъ, что CD (фиг. 224) параллельна AB, а AB перпендикулярна къ плоскости MN; докажемъ, что CD также перпендикулярна къ MN.

Плоскость, проведенная черезъ двѣ параллельныя AB и CD, пересѣчетъ плоскость MN по линіи BD, потому что точки B и D принадлежатъ обѣимъ плоскостямъ. Прямая AB перпендикулярна къ плоскости MN; слѣдовательно она перпендикулярна къ прямой BD, проведенной въ этой плоскости черезъ ея основаніе (§ 380); поэтому въ плоскости $ABDC$ прямая CD, параллельная AB, будетъ перпендикулярна къ BD (§ 72).

Фиг. 224-я.



Черезъ точку D проведемъ прямую FG перпендикулярно сѣченію BD, и соединимъ точку D съ какою нибудь точкою A перпендикуляра AB; прямая FG будетъ перпендикулярна къ DA (§ 387). И такъ, FG перпендикулярна къ двумъ прямымъ DB и DA, проведеннымъ по плоскости $ABDC$; слѣд. она перпендикулярна и къ DC, проведенной въ этой плоскости черезъ основаніе D (§ 381). И такъ, CD перпендикулярна къ FG и къ DB, т. е. къ двумъ линіямъ, проведеннымъ въ плоскости MN; слѣд. она перпендикулярна къ самой плоскости MN (§ 381).

Предложеніе.

§ 389. *Изъ точки, внѣ плоскости, можно опустить на послѣднюю перпендикуляръ, и только одинъ.*

1) Пусть точка A дана внѣ плоскости M.

Фиг. 225-я.

Изъ какой нибудь точки D плоскости M возставимъ къ ней перпендикуляръ DC, черезъ точку A и прямую CD проведемъ плоскость, и въ этой плоскости черезъ точку A проведемъ AB параллельно линіи CD. Прямая AB и будетъ искомый перпендикуляръ; потому что прямая, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама перпендикулярна къ этой послѣдней (§ 388).

2) Остается доказать, что изъ точки A, внѣ плоскости M, можно опустить одинъ только перпендикуляръ. Положимъ, что AF также перпендикулярна къ плоскости M. Плоскость, проведенная черезъ эти два пересѣкающіеся перпендикуляра, встрѣтитъ плоскость M по линіи BF; потому что точки B и F лежатъ на обѣихъ плоскостяхъ; и такимъ образомъ получимъ въ плоскости ABF два перпендикуляра AB и AF къ прямой BF изъ точки A (§ 380), — а это невозможно.

§ 390. Слѣдствіе. Изъ точки внѣ плоскости можно опустить на нее одинъ только перпендикуляръ; всѣ другія прямыя, соединяющія эту точку съ различными точками плоскости, будутъ наклонныя и болѣе перпендикуляра (§ 386); поэтому *разстояніе между точкою и плоскостью измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ этой точки на плоскость.*

Предложеніе.

§ 391. *Перпендикуляры къ плоскости параллельны между собою.*

Пусть прямыя AB, CD и FG перпендикулярны къ плоскости M; точки B, D и G означаетъ пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ плоскостью M. Черезъ точку D вообразимъ линію, параллельную къ прямой AB; она будетъ перпендикулярна къ плоскости M (§ 388); слѣдовательно совпадетъ съ CD; потому что изъ точки, взятой на плоскости можно къ ней возставить одинъ только перпендикуляръ; поэтому CD параллельна AB. Точно также докажется, что FG параллельна AB и CD; такъ что всѣ перпендикуляры къ плоскости M попарно параллельны.

Фиг. 226-я.

Предложеніе.

§ 392. *Линіи, параллельныя одной и той же прямой, параллельны между собою* (фиг. 226).

Пусть CD и FG, порознь, параллельны прямой AB; докажемъ, что CD параллельна FG.

Проведемъ плоскость M перпендикулярно къ прямой AB; какъ прямыя CD и FG параллельны AB, то онѣ перпендикулярны къ плоскости M (§ 388), а слѣдовательно параллельны между собою (§ 391).

21. Проэкціи точки и линіи на плоскость.—Проэкція прямой на плоскость есть прямая.—Уголъ, образуемый прямою съ плоскостью.

§ 393. *Проэкціей точки на плоскость называется основаніе перпендикуляра, проведеннаго изъ этой точки на плоскость.*

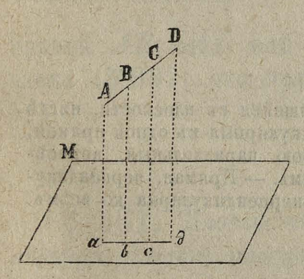
§ 394. *Проэкціей какой бы то ни было линіи на плоскость называется мѣсто проэкцій точекъ этой линіи на плоскость.*

Предложеніе.

§ 395. *Проэкція прямой на плоскость есть также прямая линія.*

Пусть дана прямая AB и плоскость M. Чтобы получить проэкцію прямай AB на плоскости M, вообразимъ, что изъ точекъ этой прямой опущены перпендикуляры Aa, Bb, Cc, Dd, и т. д. на плоскость, причемъ точки a, b, c, d и т. д. означаютъ пересѣченія перпендикуляровъ съ плоскостью M. Перпендикуляры Aa, Bb, Cc, Dd и т. д. параллельны между собою (§ 391); докажемъ, что они лежатъ въ одной плоскости. Вообразимъ плоскость черезъ пересѣкающіяся прямыя AD и Aa; прямая Bb будетъ находится въ этой плоскости, ибо точка ея B лежитъ въ этой плоскости, и Bb параллельна Aa; то же скажемъ и о прямыхъ Cc, Dd и т. д.; точки a, b, c, d и т. д. будутъ также въ этой плоскости; а какъ онѣ лежатъ и въ плоскости M, то будутъ принадлежать пересѣченію плоскости M съ плоскостью, проведенною черезъ пересѣкающіяся прямыя AD и Aa; слѣдовательно $abcd$... есть прямая линія.

Фиг. 179-я.



Прямая линія опредѣляется двумя точками; слѣд. *проэкція прямой на плоскости получится, если соединить между собою проэкціи двухъ какихъ нибудь ея точекъ.*

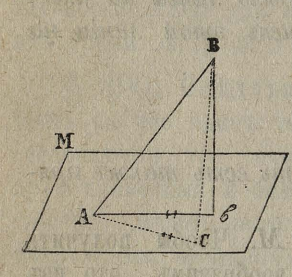
Предложеніе.

§ 396. *Острый уголъ, составленный данною прямою съ ея проэкціею на плоскость, меньше всякаго угла, образуемаго*

этою прямою съ линіями, проведенными въ плоскости проэкціи черезъ основаніе данной прямой.

Пусть прямая AB пересѣкаетъ плоскость M въ точкѣ A; опустимъ перпендикуляръ Bb на плоскость M: точка b означитъ проэкцію точки B на плоскости M; соединивъ точку b съ A, получимъ Ab — проэкцію прямой AB на плоскости. Въ плоскости M черезъ точку A проведемъ какую нибудь прямую AC и докажемъ, что $\angle BAb < \angle BAC$. Отложимъ $AC = Ab$ и соединимъ точку C съ B. Въ треугольникахъ ABC и ABb бокъ AB — общій, $AC = Ab$, $BC > Bb$ (§ 386), слѣдовательно $\angle CAB > \angle BAb$.

Фиг. 228-я.



§ 397. *Угломъ прямой линіи съ плоскостью называется острый уголъ, образуемый этою прямою съ ея проэкціею на упомянутую плоскость.*

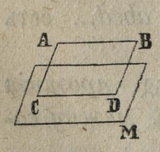
---

22. Линія, проведенная параллельно прямой, находящейся въ плоскости, нигдѣ не встрѣчаетъ этой плоскости.—Плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, нигдѣ не встрѣчаются. — Двѣ плоскости, между собою параллельныя, пересѣкаются третьею плоскостью по линіямъ параллельнымъ. — Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна ко всѣмъ.

Предложеніе.

§ 398. *Линія, проведенная параллельно прямой, находящейся въ плоскости, нигдѣ не встрѣчаетъ этой плоскости.*

Фиг. 229-я.



Пусть прямая CD лежитъ въ плоскости M, и AB параллельна ей. Черезъ двѣ параллельныя AB и CD проведемъ плоскость; она пересѣчетъ плоскость M по линіи CD; и такъ, прямая AB, находясь въ плоскости $ABDC$ и будучи параллельна CD, не можетъ пересѣчь плоскости M.

§ 399. Мы уже замѣтили, что прямая называется параллельною къ плоскости, если она на всемъ протяженіи не встрѣчается съ нею. Поэтому *линія, проведенная параллельно прямой, находящейся на плоскости, параллельна этой послѣдней.*

Предложеніе.

§ 400. *Прямая линія и плоскость, проведенныя перпендикулярно къ одной и той же прямой линіи, параллельны между собою.*

Положимъ, что прямая AC и плоскость M перпендикулярны къ прямой AB; надо доказать, что прямая AC параллельна плоскости M. Черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя AC и AB проведемъ плоскость; положимъ, что она пересѣчетъ плоскость M по линіи BD, она пройдетъ черезъ точку B — общую прямой AB и плоскости M. Прямая AB перпендикулярна къ прямой BD (§ 380); она же перпендикулярна и къ прямой AC. И такъ, прямыя AC и BD, находясь въ одной плоскости $ABDC$, перпендикулярны къ одной и той же прямой AB; слѣд. онѣ параллельны между собою; отсюда заключаемъ (§ 399), что прямая AC параллельна плоскости M.

Фиг. 230-я.

A C M B D

Предложеніе.

§ 401. *Плоскость, проведенная черезъ прямую, параллельную данной плоскости, можетъ пересѣчь эту послѣднюю только по линіи, параллельной данной прямой* (фиг. 229).

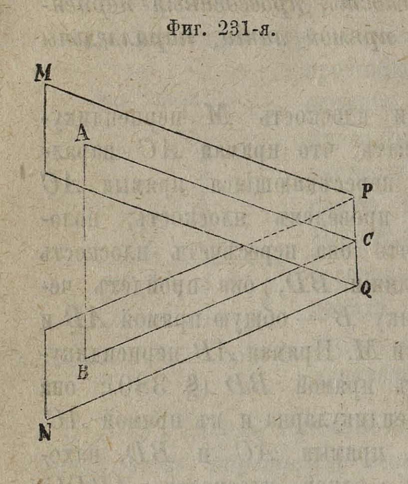
Пусть прямая AB параллельна плоскости M; черезъ AB и какую нибудь точку C плоскости M проведемъ плоскость $ABDC$ и положимъ, что CD есть пересѣченіе ея съ плоскостью M; надо доказать, что прямая AB параллельна прямой CD. Прямыя AB и CD находятся въ одной плоскости $ABDC$, притомъ AB никогда не встрѣтится съ плоскостью M, по условію; а слѣд. AB не можетъ встрѣтиться съ прямою CD, которая лежитъ въ плоскости M.

Предложеніе.

§ 402. *Плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой линіи, нигдѣ не встрѣчаются.*

Положимъ, что плоскости *M* и *N* перпендикулярны къ прямой *AB*, а точки *A* и *B* находятся на этихъ плоскостяхъ: *A* на *M*, а *B* на *N*. Если допустить, что плоскости *M* и *N* встрѣтятся, и какую нибудь точку *C* ихъ сѣченія *PQ* соединить съ точками *A* и *B*, то найдемъ, что *AB* будетъ перпендикулярна къ *AC*, потому что *AC* проходитъ по плоскости *M* черезъ основаніе *A* перпендикуляра къ плоскости (§ 380); по той же причинѣ *AB* перпендикулярна къ *BC*; слѣдовательно въ плоскости *ABC* было бы опущено два перпендикуляра изъ точки *C* на прямую *AB*. И такъ, нельзя допустить, что плоскости *M* и *N* встрѣтятся.

Фиг. 231-я.



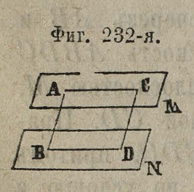
§ 403. *Двѣ плоскости называются параллельными, если онѣ не встрѣчаются, сколько бы ихъ ни продолжали.*

И такъ, *двѣ плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой линіи, параллельны между собою.*

Предложеніе.

§ 404. *Параллельныя между собою плоскости пересѣкаются третьею плоскостью по линіямъ параллельнымъ.*

Фиг. 232-я.



Пусть сѣченія параллельныхъ плоскостей *M* и *N* третьею плоскостью будутъ *AC* и *BD*. Эти сѣченія, находясь въ параллельныхъ плоскостяхъ, не могутъ встрѣтиться; притомъ онѣ и въ одной плоскости *ABDC*; слѣдовательно *AC* и *BD* параллельны одна другой.

Предложеніе.

§ 405. *Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна ко всѣмъ остальнымъ.*

Пусть плоскости *M*, *N* и *P* попарно параллельны, и *AC* перпендикулярна къ плоскости *M*; докажемъ, что *AC* перпендикулярна къ плоскостямъ *N* и *P*.

Черезъ прямую AC проведемъ какую нибудь плоскость; она пересѣчетъ плоскости M, N и P по линіямъ параллельнымъ AA', BB' и CC'; такъ какъ AC перпендикулярна къ AA' (§ 380), то она перпендикулярна и къ линіямъ BB' и CC' (§ 72). Проведя какую нибудь другую плоскость черезъ прямую AC, найдемъ, что AC перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ, на каждой изъ плоскостей N и P; слѣдовательно она перпендикулярна и къ самимъ плоскостямъ (§ 381).

Фиг. 233-я.

§ 406. Слѣдствіе. *Двѣ плоскости, параллельныя третьей, параллельны между собою* (фиг. 233).

Дѣйствительно, если плоскости P и N параллельны плоскости M, то перпендикуляръ AC къ плоскости M будетъ перпендикуляромъ къ плоскостямъ N и P; слѣдовательно эти плоскости параллельны между собою (§ 402).

---

23. Части параллельныхъ линій, отсѣкаемыя двумя параллельными плоскостями, равны между собою. — Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, соотвѣтственно параллельны, то углы равны между собою, или, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые угла, а плоскости ихъ взаимно параллельны. — Части двухъ прямыхъ, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональны между собою.

Предложеніе.

§ 407. *Части параллельныхъ линій, отсѣкаемыя двумя параллельными плоскостями, равны между собою* (фиг. 232).

Пусть плоскости M и N, а также прямыя AB и CD параллельны между собою; точки A, C, B и D означаютъ пересѣченія прямыхъ съ плоскостями.

Черезъ двѣ параллельныя линіи AB и CD проведемъ плоскость; она разсѣчетъ параллельныя плоскости M и N по линіямъ параллельнымъ AC и BD; и такъ, въ плоскости $ACDB$ части параллельныхъ AB и CD, отсѣкаемыя параллельными AC и DB, равны между собою.

§ 408. Слѣдствіе. *Разстоянія между параллельными плоскостями повсюду одинаковы.*

Въ самомъ дѣлѣ, перпендикуляры, возставленные изъ двухъ какихъ нибудь точекъ, взятыхъ на одной изъ параллельныхъ плоскостей, до пересѣченія съ другою плоскостью, равны между собою; потому что они параллельны между собою и отсѣчены параллельными плоскостями.

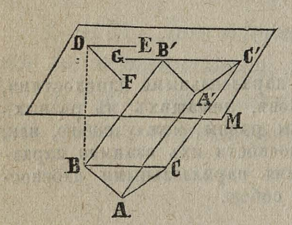
Предложеніе.

§ 409. *Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, соотвѣтственно параллельны, то углы равны между собою, или, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые угла, а плоскости ихъ взаимно параллельны.*

Пусть BA и BC соотвѣтственно параллельны бокамъ $B'A'$ и $B'C'$.

1) Докажемъ, что $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Отложимъ произвольныя, но равныя части, $BA = B'A'$ и $BC = B'C'$, и проведемъ прямыя AA', BB', CC', AC и $A'C'$. Прямыя AA' и BB', соединяющія концы равныхъ и параллельныхъ линій, равны между собою и параллельны (§ 120); по той же причинѣ CC' и BB' равны между собою и параллельны. Отсюда слѣдуетъ, что AA' и CC' равны между собою и параллельны (§ 392); вслѣдствіе чего и $AC = A'C'$; слѣдовательно, въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$, три стороны одного равны тремъ сторонамъ другаго, — значитъ и сходственные углы равны, $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Фиг. 234-я.



Продолживъ бокъ $B'C'$, получимъ смежные углы, слѣд. $\angle A'B'C' + \angle A'B'G = 2d$ (d означаетъ прямой уголъ); поэтому $\angle ABC + \angle A'B'G = 2d$.

2) Плоскости угловъ ABC и $A'B'C'$ параллельны между собою.

Изъ вершины B возставимъ перпендикуляръ къ плоскости ABC, до пересѣченія съ плоскостью M угла $A'B'C'$, въ точкѣ D; черезъ эту точку, въ плоскости M, проведемъ DE и DF, соотвѣтственно параллельныя $B'C'$ и $B'A'$; онѣ же будутъ параллельны бокамъ BC и BA (§ 392). Перпендикуляръ BD къ плоскости ABC — перпендикуляренъ къ прямымъ BC и BA, проведеннымъ по этой плоскости черезъ основаніе B; стало быть BD перпендикулярна и къ DE, и къ DF; ибо онѣ соотвѣт-

ственно параллельны линіямъ BC и BA. И такъ, DB перпендикулярна къ плоскости M (§ 381); значитъ двѣ плоскости M и ABC перпендикулярны къ прямой BD; слѣдовательно онѣ параллельны между собою (§ 402).

§ 410. *Угломъ двухъ прямыхъ, не пересѣкающихся и не параллельныхъ, называется уголъ, образуемый прямыми, проведенными черезъ какую нибудь точку параллельно даннымъ прямымъ въ одинаковомъ направленіи съ ними.*

Если даны двѣ прямыя, и извѣстно ихъ направленіе, то уголъ, образуемый этими прямыми, будетъ одинъ и тотъ же, при какой бы точкѣ ни былъ построенъ этотъ уголъ (§ 409).

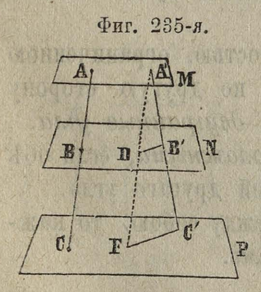
Предложеніе.

§ 411. *Части двухъ прямыхъ, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональными между собою.*

Положимъ, что плоскости M, N и P параллельны между собою, и двѣ прямыя AC и $A'C'$ пересѣкаютъ ихъ въ точкахъ A, B, C, A', B' и C'. Докажемъ, что, напримѣръ,

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Фиг. 235-я.



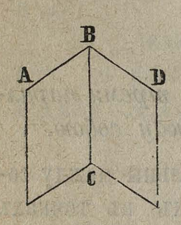
Черезъ точку A' проведемъ прямую $A'F$ параллельно линіи AC; точками D и F означимъ пересѣченія прямой $A'F$ съ плоскостями N и P. Плоскость, проведенная черезъ двѣ пересѣкающіяся линіи $A'C'$ и $A'F$, пересѣчетъ плоскости N и P по параллельнымъ линіямъ $B'D$ и $C'F$. И какъ, въ треугольникѣ $A'C'F$ хорда $B'D$ параллельна боку $C'F$; слѣд. $A'D : A'B' = DF : B'C'$. Но части параллельныхъ AB и $A'D$, а также BC и DF, отсѣченныя параллельными плоскостями, равны между собою; поэтому, вставивъ въ предъидущую пропорцію, вмѣсто $A'D$ и DF, имъ равныя, получимъ $AB : A'B' = BC : B'C'$.

24. Двугранные углы, ребро, грань или сторона. — Измѣренiе двугранныхъ угловъ. — Плоскости взаимно-перпендикулярныя. — Свойства двугранныхъ угловъ, происходящихъ отъ пересѣченiя двухъ параллельныхъ плоскостей какою ни есть плоскостью. — Двѣ плоскости, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ перпендикуляръ къ другой, взаимно-перпендикулярны. — Перпендикуляръ къ общему пересѣченiю двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный въ одной изъ нихъ, перпендикуляренъ къ другой. — Плоскость, перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, перпендикулярна къ ихъ пересѣченiю, и наоборотъ.

§ 412. *Двуграннымъ угломъ* называется пространство между двумя пересѣкающимися плоскостями, ограниченными линiею ихъ пересѣченiя.

Линiя эта называется *ребромъ*, а двѣ его плоскости — *гранями* или сторонами двуграннаго угла.

Фиг. 236-я.



Двугранный уголъ означается четырьмя буквами: двѣ среднiя означаютъ ребро BC, а крайнiя — какiя нибудь двѣ точки A и D на его граняхъ. Если же при ребрѣ одинъ только уголъ, то его можно означить только двумя буквами, поставленными на ребрѣ. Поэтому двугранный уголъ между плоскостями AC и CD читается $ABCD$ или $DBCA$ или просто уголъ BC.

Двугранные углы называются *равными*, если при наложенiи ихъ ребра и грани совмѣщаются.

Отъ пересѣченiя плоскости другою плоскостью, ограниченною ихъ пересѣченiемъ, т. е. непродолженною по другую сторону первой плоскости, образуются *два смежные двугранные угла.*

Двугранные углы называются *противоположными*, если обѣ грани одного составляютъ продолженiе граней другаго угла.

Если смежные двугранные углы равны между собою, то каждый называется *прямымъ двуграннымъ угломъ.*

Предложенiе.

§ 413. *Если черезъ какiя нибудь точки, взятыя на ребрѣ двуграннаго угла, провести плоскости, перпендикулярные къ ребру, то пересѣченiя ихъ съ гранями угла образуютъ равные между собою углы.*

Фиг. 237-я.

Возьмемъ двѣ точки F и F' на ребрѣ AB двуграннаго угла $CABD$ и проведемъ плоскости HFG и $H'F'G'$ перпендикулярно къ AB; онѣ параллельны между собою; поэтому и пере-

сѣченія ихъ FH и $F'H'$ съ гранью ACB также параллельны между собою. По той же причинѣ пересѣченія FG и $F'G'$ также параллельны. И такъ, бока угловъ HFG и $H'F'G'$ параллельны; слѣдовательно углы равны, т. е. $\angle HFG = \angle H'F'G'$ (§ 409).

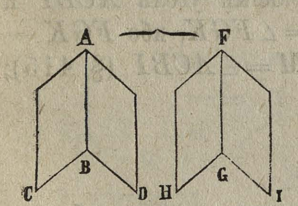
§ 414. *Уголъ (HFG), котораго бока перпендикулярны къ ребру и лежатъ въ граняхъ двуграннаго угла, называется угломъ наклоненія этого послѣдняго.* И такъ, для построенія угла наклоненія, надобно черезъ какую нибудь точку ребра двуграннаго угла провесть къ нему два перпендикуляра, одинъ въ одной грани, а другой — въ другой грани; уголъ между этими перпендикулярами и будетъ уголъ наклоненія и будетъ лежать въ плоскости перпендикулярной къ ребру (§ 381). Для даннаго двуграннаго угла уголъ наклоненія всегда одинаковъ, постояненъ, при какой бы точкѣ ребра ни строили этотъ уголъ (§ 413).

Предложеніе.

§ 415. *Два двугранные угла равны между собою, если ихъ углы наклоненія равны.*

Пусть въ двугранныхъ углахъ $CBAD$ и $HGFI$ углы наклоненія CBD и HGI равны между собою. Такъ какъ CBD есть уголъ наклоненія, то BD и BC перпендикулярны къ ребру AB и лежатъ въ его граняхъ; слѣдовательно ребро AB перпендикулярно къ плоскости CBD. По той же причинѣ ребро FG перпендикулярно къ плоскости HGI. На этомъ основаніи, если совмѣстить уголъ HGI съ угломъ CBD, то ребро GF пойдетъ по BA; иначе было бы возставлено два перпендикуляра къ плоскости CBD; слѣдовательно грань FGI совмѣстится съ гранью ABD, потому что обѣ проходятъ черезъ двѣ пересѣкающіяся прямыя BA и BD; по той же причинѣ грань HGF совмѣстится съ ABC. Итакъ, двугранные углы FG и AB равны между собою.

Фиг. 238-я.



Предложеніе (обратное).

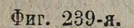
§ 416. *Въ равныхъ двугранныхъ углахъ углы наклоненія равны.*

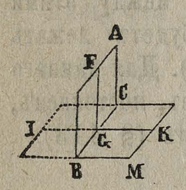
И дѣйствительно, если совмѣстимъ равные двугранные углы, и построимъ въ разныхъ точкахъ ребра углы наклоненія, то, на основаніи § 413, найдемъ, что эти углы равны между собою.

Предложеніе.

§ 417. *Въ двугранномъ прямомъ углѣ уголъ наклоненія прямой.*

Пусть уголъ $ACBM$ прямой; значитъ, онъ равенъ смежному съ нимъ углу $ACBI$ (§ 412). Черезъ какую нибудь точку G ребра BC проведемъ IK въ плоскости M и GF въ плоскости AB, — обѣ перпендикулярно къ ребру BC, — получимъ углы наклоненій FGK и FGI; они равны между собою, потому что соотвѣтственные имъ двугранные углы равны (§ 416); по этому уголъ FGK прямой.


Фиг. 239-я.



Предложеніе (обратное).

§ 418. *Если уголъ наклоненія двуграннаго угла прямой, то и двугранный уголъ прямой.*

Пусть въ двугранномъ углѣ $ACBM$ уголъ наклоненія FGK прямой; надо доказать, что $\angle ACBM = \angle ACBI$. Продолживъ грань CM и бокъ GK, получимъ двугранный уголъ $ACBI$ и его уголъ наклоненія FGI; но $\angle FGI = \angle FGK$, ибо FGK — прямой; слѣд. двугранный уголъ $ACBM = \angle ACBI$ (§ 415); значитъ, каждый изъ нихъ прямой.

Предложеніе.

§ 419. *Прямые двугранные углы равны между собою.*

И дѣйствительно, углы наклоненій прямыхъ двугранныхъ угловъ суть прямые углы (§ 417); слѣдовательно они равны между собою; а равенство угловъ наклоненій влечетъ равенство двугранныхъ угловъ.

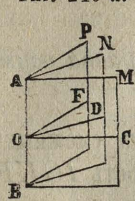
Предложеніе.

§ 420. *Двугранные углы пропорціональны своимъ угламъ наклоненій.*

1-е. Возьмемъ какой нибудь двугранный уголъ $NABM$ и построимъ его уголъ наклоненія DOC. Въ плоскости этого угла

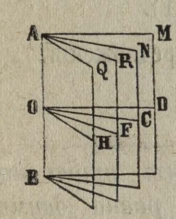
проведемъ прямую FO; получимъ уголъ FOC, большій угла DOC. Проведя плоскость черезъ FO и AB, получимъ двугранный уголъ $PABM$, очевидно, большій угла $NABM$; а угломъ наклоненія его будетъ FOC, потому что AB, будучи перпендикулярна къ двумъ линіямъ OD и OC, перпендикулярна и къ OF, проведенной въ плоскости DOC. И такъ, съ увеличеніемъ угла наклоненія, увеличивается двугранный уголъ: въ этомъ состоитъ первое условіе пропорціональности (§ 336).

Фиг. 240-я.



2-е. Въ плоскости угла наклоненія DOC двуграннаго угла $MABN$ отложимъ углы COF и FOH равными DOC; а черезъ AB и OH, AB и OF проведемъ плоскости; получимъ три равные двугранные угла $MABN$, $NABR$, $RABQ$, потому что ихъ углы наклоненія равны. Поэтому, съ увеличеніемъ угла наклоненія DOC, напримѣръ, втрое, и соотвѣтствующій ему двугранный уголъ $MABN$ увеличивается также втрое: это второе условіе пропорціональности (§ 336). И такъ, двугранные углы пропорціональны ихъ угламъ наклоненій.

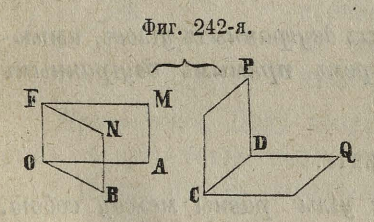
Фиг. 241-я.



§ 421. Слѣдствіе. *Двугранный уголъ измѣряется его угломъ наклоненія.*

Возьмемъ какой нибудь двугранный уголъ $MFOB$ и положимъ, что уголъ AOB есть его уголъ наклоненія; сравнимъ этотъ двугранный уголъ съ прямымъ двуграннымъ угломъ $PCDQ$, котораго уголъ наклоненія пусть будетъ PDQ. На основаніи предъидущаго параграфа, имѣемъ

Фиг. 242-я.



$$\frac{\angle MFOB}{\angle PDCQ} = \frac{\angle AOB}{\angle PDQ}.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ, что число единицъ, заключающихся въ углѣ AOB, когда прямой уголъ PDQ принятъ за единицу, равно числу единицъ, заключающихся въ двугранномъ углѣ $MFOB$, когда двугранный прямой уголъ $PDCQ$ принятъ

за единицу; слѣдовательно, *мѣра двуграннаго угла та же, что и его угла наклоненія.*

Предложеніе.

§ 422. *Сумма смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ* (фиг. 239).

Черезъ какую нибудь точку G ребра BC двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ $ACBI$ и $ACBM$ проведемъ плоскость $IGKF$, перпендикулярную къ ребру BC; такимъ образомъ получимъ углы наклоненій FGK и FGI данныхъ двугранныхъ угловъ; сумма этихъ угловъ наклоненій равна двумъ прямымъ угламъ; но какъ двугранный уголъ измѣряется его угломъ наклоненія, а двумъ прямымъ линейнымъ угламъ соотвѣтствуютъ два прямые двугранные угла, то сумма двугранныхъ угловъ $ACBI$ и $ACBM$ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ (§ 411).

§ 423. Точно также докажутся слѣдующія предложенія.

Предложеніе.

Сумма всѣхъ послѣдовательныхъ двугранныхъ угловъ по одну сторону плоскости, при общемъ ребрѣ, равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.

Предложеніе.

Сумма всѣхъ послѣдовательныхъ двугранныхъ угловъ, имѣющихъ общее ребро, равна четыремъ прямымъ двуграннымъ угламъ.

Предложеніе.

Противоположные двугранные углы равны между собою.

Предложеніе.

§ 424. *При пересѣченіи двухъ параллельныхъ плоскостей какою нибудь сѣкущею плоскостью*:

1) *внутренніе перекрестные двугранные углы равны;*

2) *внѣшніе перекрестные двугранные углы равны*;

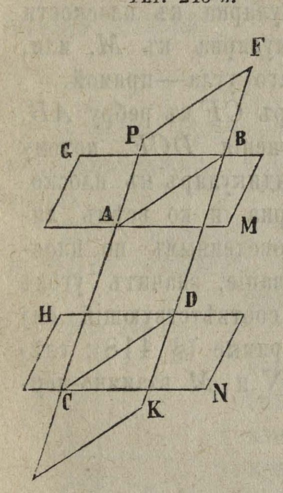
3) *соотвѣтственные двугранные углы равны*;

4) и 5) *сумма внутреннихъ угловъ, а также сумма внѣшнихъ двугранныхъ угловъ, по одну сторону сѣкущей плоскости, равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.*

Пусть плоскости M и N параллельны между собою, и разсѣчены плоскостью PK; сѣченія AB и CD будутъ параллельны между собою (§ 404).

Черезъ какую нибудь точку B ребра AB проведемъ плоскость FBG, перпендикулярную къ нему: она же будетъ перпендикулярна и къ CD, какъ параллельной съ AB (§ 415); притомъ эта плоскость пересѣчетъ плоскости M и N по параллельнымъ линіямъ BG и DH. Эти параллельныя съ сѣкущею FK образуютъ восемь угловъ наклоненій, которые соотвѣтствуютъ восьми двуграннымъ угламъ при ребрахъ AB и CD. Такъ какъ плоскіе углы: внутренніе перекрестные, внѣшніе перекрестные и соотвѣтственные равны между собою, то двугранные углы тѣхъ же наименованій также равны. Такъ какъ плоскіе углы внѣшніе или внутренніе, по одну сторону сѣкущей линіи, составляютъ два прямые угла, то двугранные углы тѣхъ же наименованій даютъ въ суммѣ два прямыхъ двугранныхъ угла.

Фиг. 243-я.



Примѣчаніе. Пять предложеній, обратныхъ здѣсь доказаннымъ, будутъ тогда только справедливы, когда ребра двугранныхъ угловъ будутъ параллельны.

---

25. Двѣ плоскости, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ перпендикуляръ къ другой, взаимно-перпендикулярны.—Перпендикуляръ къ пересѣченію двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный въ одной изъ нихъ, перпендикуляренъ къ другой.—Плоскость, перпендикулярная къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, перпендикулярна къ ихъ сѣченію и на оборотъ. — Плоскость, параллельная линіи, перпендикулярной къ плоскости, сама перпендикулярна къ этой послѣдней.

§ 425. *Перпендикулярною плоскостью* къ другой плоскости называется такая плоскость, которая съ другою образуетъ равные смежные углы; углы эти, какъ извѣстно,—прямые двугранные, а углы ихъ наклоненій—плоскіе прямые.

Если плоскость, перпендикулярную къ другой плоскости, продолжить, то образуются четыре равные двугранные угла, потому что ихъ углы наклоненій будутъ прямые и, слѣдовательно, равны между собою. Поэтому каждая изъ этихъ плоскостей будетъ перпендикулярна къ другой; такія плоскости называются *взаимно-перпендикулярными*.

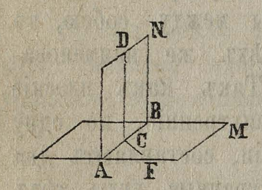
Предложеніе.

§ 426. *Двѣ плоскости, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ перпендикуляръ къ другой, взаимно-перпендикулярны.*

Положимъ, что прямая *CD* перпендикулярна къ плоскости *M*; докажемъ, что плоскость *N* перпендикулярна къ *M*, или, что то же, что уголъ наклоненія двуграннаго угла—прямой.

Проведя въ плоскости *M* перпендикуляръ *CF* къ ребру *AB*, получимъ уголъ наклоненія *DCF*; потому что *CD*, какъ перпендикуляръ къ плоскости *M*, перпендикулярна и ко всѣмъ линіямъ, *AB*, *CF*, проведеннымъ по плоскости черезъ ея основаніе; значитъ уголъ наклоненія *DCF* и соотвѣтствующій ему двугранный уголъ —прямые (§ 418); слѣдовательно плоскости *N* и *M* взаимно-перпендикулярны.

Фиг. 244-я.



Предложеніе.

§ 427. *Перпендикуляръ къ общему пересѣченію двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный въ одной изъ нихъ, перпендикуляренъ къ другой* (фиг. 244).

Пусть плоскости *N* и *M* взаимно-перпендикулярны, и прямая *CD*, находящаяся въ плоскости *N*, перпендикулярна къ пересѣченію *AB*; докажемъ, что *CD* перпендикулярна и къ плоскости *M*.

Проведя по плоскости *M* перпендикуляръ *CF* къ общему сѣченію *AB*, получимъ уголъ наклоненія *DCF* двуграннаго угла *NABM*; а какъ этотъ послѣдній, по условію, прямой уголъ, то и уголъ наклоненія *DCF* (§ 417) также прямой. И такъ, прямая *CD* перпендикулярна къ двумъ прямымъ *AB* и *CF*, проведеннымъ по плоскости *M* черезъ ея основаніе; слѣдов. она перпендикулярна и къ самой плоскости *M* (§ 381).

Предложеніе (обратное).

§ 428. *Перпендикуляръ къ одной изъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, проведенный черезъ какую нибудь точку общаго ихъ пересѣченія, лежитъ въ другой плоскости* (фиг. 244).

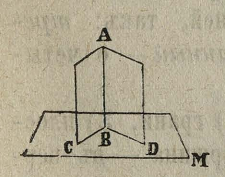
Допустимъ, что перпендикуляръ, возставленный къ плоскости *M* изъ точки *C*, не лежитъ въ плоскости *N*, которая перпендикулярна къ *M*; тогда, проведя въ плоскости *N* перпендикуляръ *CD* къ пересѣченію *AB*, найдемъ, что онъ будетъ перпендикуляренъ къ плоскости *M* (§ 427); слѣдовательно, изъ одной точки *C* будутъ два перпендикуляра къ плоскости *M*,— выводъ нелѣпый.

Предложеніе.

§ 429. *Плоскость, перпендикулярная, порознь, къ двумъ пересѣкающимся плоскостямъ, перпендикулярна къ ихъ сѣченію.*

Пусть плоскость *M* перпендикулярна къ плоскостямъ *ABC* и *ABD*; докажемъ, что плоскость *M* перпендикулярна къ ихъ сѣченію *AB*.

Фиг. 245-я.



Изъ точки *B*, общей тремъ плоскостямъ, возставимъ перпендикуляръ къ плоскости *M*; онъ долженъ лежать, въ одно время, на двухъ плоскостяхъ (§ 428) *ABC* и *ABD*; слѣдовательно долженъ совпасть съ ихъ пересѣченіемъ *AB*.

Предложеніе (обратное).

§ 430. *Плоскость, перпендикулярная къ пересѣченію двухъ плоскостей, перпендикулярна къ каждой изъ нихъ.*

Пусть плоскость *M* перпендикулярна къ пересѣченію *AB* плоскостей *ABC* и *ABD*. Каждая изъ этихъ плоскостей проходитъ черезъ перпендикуляръ *AB* къ плоскости *M*; слѣдовательно каждая перпендикулярна къ плоскости *M* (§ 426).

Предложеніе.

§ 431. *Плоскость, параллельная линіи, перпендикулярной къ какой нибудь плоскости, сама перпендикулярна къ этой послѣдней.*

Пусть плоскость N параллельна прямой AB, которая перпендикулярна къ плоскости M; надобно доказать, что плоскость N перпендикулярна къ M. Черезъ прямую AB и какую нибудь точку C сѣченія FG плоскостей M и N проведемъ плоскость; сѣченіе ея CD съ плоскостью N будетъ параллельно AB (§ 401). Вслѣдствіе параллельности прямыхъ AB и CD, эта послѣдняя будетъ перпендикулярна къ плоскости M (§ 388); слѣдовательно плоскость N перпендикулярна къ плоскости M (§ 426).

Фиг. 246-я.

---

26. Многогранные углы.—Всякій плоскій уголъ многограннаго угла менѣе суммы всѣхъ остальныхъ. — Въ многогранномъ углѣ, съ углами исходящими, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ менѣе четырехъ прямыхъ.—Равенство трегранныхъ угловъ.

§ 432. *Многограннымъ угломъ* называется пространство между нѣсколькими плоскостями, проходящими черезъ одну точку, въ которой онѣ и оканчиваются. Точка эта называется *вершиною* многограннаго угла; а линіи взаимнаго пересѣченія сосѣдственныхъ плоскостей — *ребрами*; плоскости же — *гранями*. Многогранный уголъ именуется числомъ своимъ граней, такъ: *трегранный* уголъ — о трехъ граняхъ, *четырегранный* — о четырехъ граняхъ и т. д.

Части многограннаго угла суть: 1) ребра, 2) грани, 3) плоскіе углы въ этихъ граняхъ, у нихъ общая вершина — въ вершинѣ многограннаго угла, и 4) двугранные углы, которыхъ ребра составляютъ ребра многограннаго угла.

Многогранные углы равны между собою, если ихъ вершины и ребра соотвѣтственно совмѣщаются.

Предложеніе.

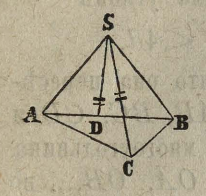
§ 433. *Всякій плоскій уголъ многограннаго угла менѣе суммы всѣхъ остальныхъ плоскихъ угловъ.*

1) Разсмотримъ сперва трегранный уголъ $SABC$, котораго вершина въ точкѣ S (фиг. 247).

Предложеніе становится очевиднымъ, когда идетъ дѣло объ углѣ, меньшемъ одного изъ остальныхъ двухъ угловъ или равномъ ему; потому что, если уголъ a меньше или равенъ углу b,

то подавно онъ будетъ меньше угла b, сложеннаго съ третьимъ угломъ.

Фиг. 247-я.

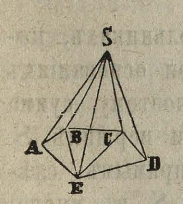


Положимъ, что уголъ ASB больше каждаго изъ остальныхъ угловъ ASC и BSC; докажемъ, что $\angle ASB < \angle ASC + \angle BSC$.

Въ плоскости ASB построимъ $\angle BSD = \angle BSC$; прямая SD пройдетъ въ углѣ ASB, потому что этотъ уголъ, по условію, больше угла BSC. Въ плоскости ASB проведемъ сѣкущую ADB, которая встрѣтила бы всѣ три прямыя SA, SD и SB; отложимъ $SC = SD$, и проведемъ прямыя AC и BC.

Въ треугольникахъ BCS и BDS двѣ стороны равны, $SC = SD$, SB — общая, и углы между ними равны, $\angle BSC = \angle BSD$; слѣдовательно и остальныя сходственныя части равны, $BC = BD$. Прямая AB, или $AD + BD < AC + BC$; а отнявъ поровну, BD и BC, получимъ $AD < AC$. Въ треугольникахъ ADS и ACS сторона $AD < AC$, $SD = SC$, и SA — общая; слѣдовательно $\angle ASD < \angle ASC$; придавъ къ обѣимъ частямъ этого неравенства поровну — къ первой части $\angle BSD$, а ко второй $\angle BSC$, получимъ

Фиг. 248-я.



$$\angle ASD + \angle BSD < \angle ASC + \angle BSC,$$

или $\angle ASB < \angle ASC + \angle BSC$.

2) Разсмотримъ теперь многогранный уголъ $SABCDE$, котораго вершина въ S, а грани суть SAB, SBC, SCD, SDE и SEA; докажемъ, что

$$\angle ASB < \angle ASE + \angle BSC + \angle CSD + \angle ESD.$$

Черезъ ребра SE и SB, SE и SC проведемъ плоскости. Изъ трегранныхъ угловъ $SABE$, $SBCE$ и $SCDE$ послѣдовательно получимъ

$$\angle ASB < \angle ASE + \angle BSE,$$

$$\angle BSE < \angle BSC + \angle ESC,$$

$$\angle ESC < \angle CSD + \angle ESD.$$

Сложивъ эти неравенства и отнявъ общіе члены отъ обѣихъ частей, найдемъ $\angle ASB < \angle ASE + \angle BSC + \angle CSD + \angle ESD$.

Предложенiе.

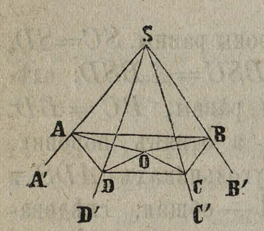
§ 434. *Въ многогранномъ углѣ, съ углами исходящими, сумма всѣхъ его плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ.*

Возьмемъ многогранный уголъ S, составленный гранями $SA'B'$, $SA'D'$, $SD'C'$ и $SC'B'$; надо доказать, что сумма угловъ

$$\angle A'SB' + \angle A'SD' + \angle D'SC' + \angle B'SC' < 4d.$$

Проведемъ плоскость $ABCD$ и положимъ, что она пересѣкаетъ грани многограннаго угла S по линiямъ AB, BC, CD и AD. Изъ какой нибудь точки O, взятой внутри многоугольника $ABCD$, проведемъ прямыя OA, OB,... во всѣ вершины. При точкѣ O получимъ столько треугольниковъ, сколько ихъ при вершинѣ S; поэтому сумма угловъ треугольниковъ, имѣющихъ вершины при O, равна суммѣ угловъ треугольниковъ, которыхъ вершины при S. Но въ трегранномъ углѣ A имѣемъ: $\angle DAO + \angle OAB$, или

Фиг. 249-я.



$$\angle DAB < \angle DAS + \angle BAS$$

(§ 433); также при вершинѣ B треграннаго угла имѣемъ:

$$\angle ABO + \angle OBC, \text{ или } \angle ABC < \angle ABS + \angle CBS, \text{ и т. д.}$$

Итакъ, сумма угловъ при основанiяхъ въ треугольникахъ, которыхъ вершины въ O, меньше суммы угловъ при основанiяхъ въ треугольникахъ, которыхъ вершины въ S; поэтому сумма угловъ при вершинѣ O больше суммы угловъ при вершинѣ S. Но сумма угловъ при вершинѣ O равна четыремъ прямымъ; слѣдовательно сумма плоскихъ угловъ при вершинѣ S въ многогранномъ углѣ меньше четырехъ прямыхъ.

Предложенiе.

§ 435. *Трегранные углы равны между собою, если плоскiй уголъ и два прилежащiе двугранные угла одного равны плоскому углу и двумъ прилежащимъ къ нему двуграннымъ угламъ въ другомъ трегранномъ углѣ; и если, притомъ, части эти одинаково расположены.*

Пусть въ трегранныхъ углахъ S и S', $\angle ASB = \angle A'S'B'$, и двугранные углы равны:

$$\angle CASB = \angle C'A'S'B', \ \angle CBSA = \angle C'B'S'A'.$$

Вмѣстимъ трегранный уголъ S' въ S такъ, чтобы вершина S' совпала съ вершиною S, и бока $S'A'$ и $S'B'$ совмѣстились бы съ боками SA и SB; грань $A'S'C'$ пойдетъ по грани ASC, потому что двугранный уголъ $S'A'$ равенъ углу SA; слѣдовательно ребро $S'C'$ должно находиться на плоскости ASC. По равенству двугранныхъ угловъ $S'B'$ и SB, грань $B'S'C'$ пойдетъ по грани BSC, и ребро $S'C'$ будетъ лежать на плоскости BSC. И такъ, ребро $S'C'$, въ одно время, должно быть на двухъ граняхъ ASC и BCS; слѣдовательно оно совпадетъ съ ихъ пересѣченіемъ SC; поэтому трегранные углы равны.

Фиг. 250-я.

Предложеніе.

§ 436. *Трегранные углы равны между собою, если двугранный и два прилежащіе къ нему плоскіе углы въ одномъ равны двугранному углу и прилежащимъ къ нему двумъ плоскимъ угламъ другого; и если, притомъ, части эти одинаково расположены* (фиг. 250).

Положимъ, что двугранный уголъ $SA = S'A'$, и прилежащіе плоскіе углы равны: $\angle CSA = \angle C'S'A'$, $\angle ASB = \angle A'S'B'$. Вмѣстимъ трегранный уголъ S' въ S такъ, чтобы вершина S' совпала съ S и ребра $S'B'$ и $S'A'$ совпали бы соотвѣтственно съ SB и SA; это всегда возможно, потому что, по условію, уголъ $ASB = A'S'B'$. По равенству двугранныхъ угловъ $S'A'$ и SA, грань $A'S'C'$ пойдетъ по ASC; а какъ плоскіе углы $A'S'C'$ и ASC равны между собою, то ребро $S'C'$ совмѣстится съ ребромъ SC. И такъ, трегранный уголъ S' равенъ углу S.

Предложеніе.

§ 437. *Трегранные углы равны между собою, если ихъ плоскіе углы, порознь, равны и одинаково расположены.*

Пусть $\angle ASC = \angle A'S'C'$, $\angle BSC = \angle B'S'C'$, $\angle ASB = \angle A'S'B'$; надо доказать, что трегранные углы S и S' равны между собою.

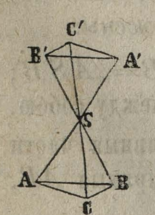
Отложимъ, по ребрамъ отъ вершинъ S и S', равныя части $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$ и проведемъ прямыя AB, BC, AC, $A'B'$, $B'C'$ и $A'C'$ (фиг. 251).

Въ треугольникахъ ASC и $A'S'C'$ между равными сторонами заключаются равные углы ASC и $A'S'C'$, слѣдовательно третьи стороны равны, $AC = A'C'$. Точно также докажется, что $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$; поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ равны между собою. Пусть O и O' означаютъ центры круговъ, описанныхъ около этихъ треугольниковъ. Опустимъ перпендикуляры изъ вершинъ S и S' на плоскости ABC и $A'B'C'$; они пройдутъ черезъ центры O и O'. Въ самомъ дѣлѣ, если бъ перпендикуляръ, опущенный изъ S на плоскость ABC, пересѣкъ ее въ какой нибудь точкѣ, различной отъ O, то эта точка неодинаково отстояла бы отъ трехъ точекъ A, B и C (§ 138); а слѣдовательно наклонныя SA, SB и SC не были бы равныя (§ 386), — что противно вышесказанному. То же заключеніе сдѣлаемъ и о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины S' на плоскость $A'B'C'$: онъ пройдетъ черезъ центръ O'. Проведя прямыя AO и $A'O'$ получимъ прямоугольные треугольники ASO и $A'S'O'$ (§ 380), въ которыхъ ипотенузы равны, $AS = A'S'$, и катеты AO и $A'O'$ равны, какъ радіусы круговъ, описанныхъ около равныхъ треугольниковъ; слѣдовательно и $SO = S'O'$. Поэтому, если вмѣстимъ трегранный уголъ $S'A'B'C'$ въ $SABC$ такъ, чтобы треугольникъ $A'B'C'$ совмѣстился съ ABC, то точка O' совпадетъ съ O, и перпендикуляръ $O'S'$ пойдетъ по перпендикуляру OS; а какъ они равны, то вершина S' совпадетъ съ S, а ребра SA, SB и SC соотвѣтственно совпадутъ съ ребрами $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$, слѣдовательно трегранные углы равны между собою.

Фиг. 251-я.

§ 438. *Примѣчаніе.* Возьмемъ трегранный уголъ $SABC$ и продолжимъ его ребра; по другую сторону вершины S образуется новый трегранный уголъ $SA'B'C'$; плоскіе углы этихъ трегранныхъ угловъ равны между собою (§ 41); но они неодинаково расположены, и этихъ трегранныхъ угловъ нельзя совмѣстить, не смотря на то, что и двугранные углы равны: $AS = A'S$, $BS = B'S$, $CS = C'S$ (§ 423). Такіе трегранные углы называются *семитрическими.* И такъ, *два трегранные угла называются симетрическими,*

Фиг. 252-я.

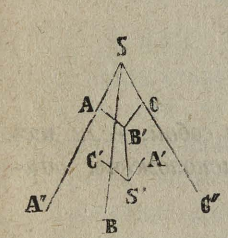


если ихъ части, т. е. плоскіе и двугранные углы, *соотвѣтственно равны, но неодинаково расположены.*

Предложеніе.

* § 439. *Если изъ точки, взятой внутри трегранпаго угла, опустить перпендикуляры на его грани, а черезъ каждые два перпендикуляра провесть плоскости, то изъ нихъ составится такой трегранный уголъ, что 1) ребра каждаго изъ двухъ трегранныхъ угловъ будутъ перпендикулярны къ гранямъ другого; 2) плоскіе углы граней одного будутъ служить дополненіемъ до двухъ прямыхъ двуграннымъ угламъ другого.*

Фиг. 253-я.



Пусть данъ трегранный уголъ S; возьмемъ какую нибудь точку S', внутри этого угла, и опустимъ перпендикуляры $S'A'$, $S'B'$ и $S'C'$ послѣдовательно на грани BSC'', $A''SC''$ и $A''SB$; основанія этихъ перпендикуляровъ означимъ буквами A', B' и C'. Черезъ каждые два перпендикуляра проведемъ плоскость. Получимъ трегранный уг. $S'A'B'C'$; докажемъ:

1) Что ребро SA'' перпендикулярно къ плоскости $B'C'S'$. Плоскость $B'C'S'$ перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ $A''SC''$ и $A''SB$ (§ 426); слѣд. она перпендикулярна и къ сѣченію SA'' этихъ двухъ плоскостей (§ 429). Также докажется, что ребра SB и SC' соотвѣтственно перпендикулярны къ плоскостямъ $A'S'C'$ и $A'S'B'$.

2) *Двугранный уголъ $C'S'B'A'$, котораго ребро $S'B'$ перпендикулярно къ плоскости $A''SC''$, служитъ дополненіемъ углу $A''SC''$.* Въ самомъ дѣлѣ, ребро $S'B'$ перпендикулярно къ сѣченіямъ AB' и $B'C$ плоскости $A''SC''$ съ плоскостями $C'S'B'$ и $A'S'B'$; значитъ, уголъ $AB'C$ есть уголъ наклоненія двуграннаго угла $S'B'$; но въ четвероугольникѣ $SAB'C$ сумма угловъ равна четыремъ прямымъ, углы же A и C прямые, потому что ребра SA'' и SC'' перпендикулярны къ гранямъ $B'S'C'$ и $B'S'A'$; и такъ углы $A''SC''$ и $AB'C$ взаимно дополнительные до двухъ прямыхъ.

* § 440. Трегранные углы S и S' называются *взаимно-дополнительными*; потому что каждый плоскій уголъ одного до-

полнителенъ въ другомъ двугранному углу, котораго ребро перпендикулярно къ плоскости линейнаго угла.

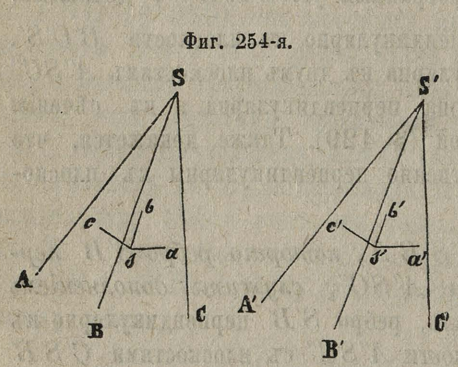
Предложеніе.

* § 441. *Въ трегранномъ углу сумма двугранныхъ угловъ больше двухъ и меньше шести прямыхъ угловъ* (фиг. 253).

Построимъ трегранный уголъ S', дополнительный данному углу S (§ 439). Сумма двугранныхъ угловъ въ углу S вмѣстѣ съ суммой плоскихъ угловъ треграннаго угла S' составитъ *шесть* прямыхъ; значитъ, сумма однихъ двугранныхъ угловъ менѣе *шести* прямыхъ. Но какъ сумма линейныхъ угловъ въ углу S' меньше четырехъ прямыхъ, то сумма двугранныхъ угловъ въ углу S больше *двухъ* прямыхъ; потому что обѣ суммы составляютъ только шесть прямыхъ угловъ.

Предложеніе.

* § 442. *Трегранные углы равны между собой, если ихъ двугранные углы, порознь, равны, и грани расположены одинаково.*



Пусть въ трегранныхъ углахъ S и S' двугранные углы равны: $\angle SA=\angle S'A'$, $\angle SB=\angle S'B'$, $SC=S'C'$; докажемъ, что и плоскіе углы трегранныхъ угловъ S и S' равны; а отсюда заключимъ и о равенствѣ трегранныхъ угловъ S и S' (§ 437), если только грани одинаково расположены. Построимъ трегранные углы s и s' дополнительные треграннымъ угламъ S и S'.

Каждый плоскій уголъ при s равенъ плоскому углу при s', потому что они имѣютъ равныя дополненія до двухъ прямыхъ (§ 439); слѣд. трегранные углы s и s' равны между собою; значитъ и двугранные ихъ углы равны между собою; а отсюда заключаемъ о равенствѣ плоскихъ угловъ при S и S' (§ 439).

ОТДѢЛЪ ВОСЬМОЙ.

Многогранники.

27. Многогранники вообще, грани, ребра и вершины. — Простѣйшие виды многогранниковъ: тетраэдръ, пирамида полная и усѣченная, призма прямая и наклонная, призма усѣченная, параллелопипедъ, кубъ, или правильный шестигранникъ. — Измѣреніе поверхностей многогранниковъ. Поверхности призмы и пирамиды, включая основанія и безъ основаній.

§ 443. *Многогранникомъ* называется объемъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ плоскостями. Отъ взаимныхъ пересѣченій каждой плоскости со всѣми сосѣдственными плоскостями составляются многоугольники,—ихъ называютъ *гранями* многогранника. Бока граней называются *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника. *Діагональю* многогранника называется прямая, соединяющая вершины двухъ угловъ, находящихся не при одной грани.

Для ограниченія пространства плоскостями, надобны по меньшей мѣрѣ четыре плоскости; въ самомъ дѣлѣ, три плоскости, взаимно пересѣкающіяся въ одной точкѣ, образуютъ трегранный уголъ, и тогда пространство остается неограниченнымъ; если жъ разсѣчь этотъ уголъ плоскостью, проходящею черезъ три точки, взятыя на его ребрахъ, то получится объемъ, ограниченный четырьмя треугольниками и называется *четырегранникомъ* или *тетраэдромъ*.

Многогранникъ о пяти, шести и т. д. граняхъ называется *пятигранникомъ*, *шестигранникомъ* и т. д.

§ 444. Если многогранный уголъ разсѣчь плоскостью такъ, чтобы пространство его стало ограниченнымъ, то получится многогранникъ, называемый *пирамидою*.

Пирамидою называется многогранникъ, у котораго одна грань какой нибудь многоугольникъ, а всѣ прочія грани — треугольники, которыхъ вершины сходятся въ одной точкѣ. Эта точка называется *вершиною пирамиды*; а грань, противо-

лежащая вершинѣ—*основаніемъ* ея; разстояніе между вершиною и основаніемъ называется *высотою пирамиды*. Остальныя грани, выключая основаніе, называются *боковыми гранями* пирамиды; ребра пирамиды, выключая стороны основанія, называются *боковыми ребрами пирамиды*.

Пирамида называется треугольною, четвероугольною и т. д., когда ея основаніе треугольникъ, четвероугольникъ и т. д. Очевидно, что треугольная пирамида есть тетраэдръ, и каждая его грань можетъ быть принята за основаніе пирамиды.

§ 445. Пирамида раздѣляется плоскостью параллельно ея основанію, на двѣ части: одна часть составитъ пирамиду, которой основаніе есть многоугольникъ, образуемый сѣкущею плоскостью, а вершина — общая съ данною пирамидою; другая же часть, между параллельными плоскостями, называется *усѣченною пирамидою*, въ которой параллельные многоугольники называются *основаніями усѣченной пирамиды*, а разстояніе между ними—*высотою* усѣченной пирамиды.

§ 446. *Пирамида* называется *правильною*, когда основаніе ея правильный многоугольникъ, а высота проходитъ черезъ центръ этого многоугольника. Въ существованіи правильныхъ пирамидъ легко убѣдиться: стоитъ только вписать въ кругѣ или около него описать правильный многоугольникъ, изъ центра возставить перпендикуляръ къ плоскости многоугольника и провести плоскости черезъ какую нибудь его точку и каждый бокъ многоугольника.

Въ правильной пирамидѣ боковыя ребра равны между собою; дѣйствительно, они суть наклонныя къ плоскости основанія, основанія этихъ наклонныхъ равно отстоятъ отъ основанія перпендикуляра, т. е. отъ центра (§ 386). Поэтому боковыя грани правильной пирамиды суть равнобедренные треугольники.

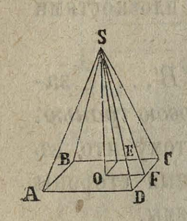
Предложеніе.

§ 447. *Въ правильной пирамидѣ, прямыя, соединяющія вершину ея съ серединами боковъ основанія, перпендикулярны къ этимъ бокамъ и равны между собою.*

Возьмемъ правильную пирамиду $SABCD$; основаніе ея $ABCD$ есть правильный многоугольникъ, и высота ея, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ вершины S на основаніе, проходитъ че-

резъ центръ O этого основанія. Изъ центра O опустимъ перпендикуляры OE, OF,... на бока BC, CD,...; они раздѣлятъ пополамъ каждый изъ этихъ боковъ (§ 146). Прямая SF, соединяющая вершину S равнобедреннаго треугольника CDS съ серединою F основанія CD этого треугольника, перпендикулярна къ CD (§ 94); по той же причинѣ SE перпендикулярна къ BC и т. д. Но SF, SE,... суть наклонныя къ плоскости $ABCD$; а OF, OE и т. д. суть радіусы круга вписаннаго въ правильномъ многоугольникѣ $ABCD$; поэтому $SF = SE =$ и т. д. (§ 386).

Фиг. 255-я.

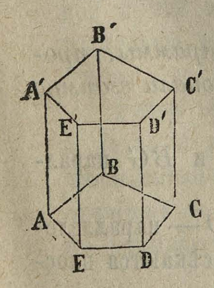


Прямая, соединяющая вершину правильной пирамиды съ серединою какого нибудь бока основанія, называется *апоѳемою* пирамиды; поэтому SF, SE,... суть апоѳемы правильной пирамиды $ABCD$.

§ 448. Возьмемъ какой нибудь многоугольникъ $ABCDE$ (фиг. 256); черезъ вершины его проведемъ прямыя AA', BB', CC',..., внѣ плоскости $ABCDE$, параллельныя между собою; черезъ параллельныя AA' и BB', BB' и CC' и т. д. проведемъ плоскости, ограничивая ихъ плоскостью $ABCDE$; полученное такимъ образомъ неопредѣленное пространство ограничимъ какою нибудь плоскостью $A'B'C'D'E'$—параллельною плоскости $ABCDE$; получимъ тѣло, называемое *призмою*.

Призмою называется многогранникъ, ограниченный съ двухъ сторонъ параллельными гранями, а съ прочихъ гранями, которыя пересѣкаются послѣдовательно по линіямъ, параллельнымъ между собою.

Фиг. 256-я.



Эти параллельныя линіи называются *боковыми ребрами* призмы; а два многоугольника, ограничивающіе боковыя ребра, называются *основаніями* призмы; разстояніе же между основаніями называется *высотою* призмы. Такъ, если грани AB', BC', CD', DE' и AE' пересѣкаются по линіямъ параллельнымъ AA', BB',... EE', и грани $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ параллельны между собою, то многогранникъ — призма. Параллельныя прямыя AA', BB',...

будутъ боковыя ребра, а многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ — основанія.

§ 449. *Боковыя ребра въ каждой призмѣ равны между собою*, потому что, вслѣдствіе опредѣленія призмы, они параллельны между собою и ограничены параллельными плоскостями (§ 407).

§ 450. Каждая грань призмы $ABB'A'$, $BCC'B'$, ..., заключающаяся между боковыми ребрами, называется *боковою гранью*. *Боковыя грани призмы суть параллелограммы*, потому что въ каждой изъ нихъ, наприм. въ $ABB'A'$ противоположныя стороны AA' и BB' равны и параллельны, какъ ребра призмы.

Основанія призмы равны между собою, потому что бока ихъ, наприм. AB и $A'B'$, какъ противолежащія стороны параллелограмма $ABB'A'$, равны; эти же бока и параллельны; слѣд. и углы основаній соотвѣтственно равны (§ 409).

§ 451. Если призму разсѣчь плоскостью параллельно основаніямъ, то каждая изъ полученныхъ частей будетъ также призма (§ 448); слѣд. *сѣченіе параллельное основаніямъ призмы, есть многоугольникъ, имъ равный* (§ 450).

Сѣченіе, не параллельное основаніямъ призмы, раздѣляетъ ее на двѣ части, и каждая изъ нихъ называется *усѣченною призмою*.

§ 452. Призма называется треугольною, четвероугольною, ..., когда ея основаніе треугольникъ, четвероугольникъ, ...

Призма называется *прямою* или *наклонною*, смотря по тому, *перпендикулярно* ли боковое ребро къ основанію призмы или наклонно къ нему. Въ прямой призмѣ боковыя грани — прямоугольники (§ 380).

§ 453. *Параллелипипедомъ называется шестигранникъ, котораго противолежащія грани параллельны.*

Предложеніе.

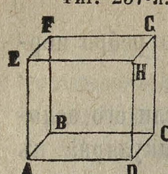
§ 454. *Грани параллелипипеда параллелограммы, противолежащія изъ нихъ равны между собою, діагонали взаимно дѣлятся пополамъ.*

Пусть грани FH и AC, AF и DG, AH и BG параллельны.

1) Докажемъ, что, напримѣръ, грань $ABCD$ — параллелограммъ. Параллельныя плоскости AF и DG пересѣкаются плос-

костью AC по параллельнымъ линіямъ AB и CD; параллельныя плоскости AH и BG тою же плоскостью разсѣкаются по параллельнымъ линіямъ AD и BC. И такъ, въ четвероугольникѣ $ABCD$ противолежащія стороны параллельны; слѣдовательно онъ параллелограммъ. Также докажется, что и остальныя грани параллелограммы.

Фиг. 257-я.



2) Въ противолежащихъ параллелограммахъ AC и FH, двѣ смежныя стороны соотвѣтственно равны, $AB=EF$ и $BC=FG$, какъ противолежащіе бока въ параллелограммахъ AF и BG; углы между этими сторонами также равны, $\angle ABC=\angle EFG$; ибо ихъ бока параллельны. И такъ, параллелограммы AC и FH равны между собою. Также докажется, что грань AF равна грани DG и гр. $AH=$ гр. BG.

3) Проведемъ діагонали BH и DF; онѣ находятся въ одной плоскости, потому что концы ихъ B и H, D и F, всѣ четыре лежатъ на параллельныхъ линіяхъ BF и DH (§ 455); проведя плоскость черезъ эти параллельныя и означивъ сѣченія ея BD и FH съ противоположными гранями AC и FH, получимъ параллелограммъ $BDHF$; діагонали его будутъ діагоналями параллелипипеда, и взаимно дѣлятся на равныя части. Тоже скажемъ и объ остальныхъ двухъ діагоналяхъ; такъ что всѣ четыре діагонали BH, DF, AG и CE взаимно дѣлятся пополамъ.

Фиг. 258-я.

§ 455. Ребра параллелипипеда, AE, BF, CG и DH, параллельны между собою, потому что они составляютъ или противоположныя стороны параллелограммовъ, или параллельны одной и той же прямой; а какъ плоскости $ABCD$ и $EFGH$ параллельны между собою, то параллелипипедъ $ABCDEFGH$ есть призма, въ которой $ABCD$ и $EFGH$ основанія.

Ребра AD, BC, EH и FG тоже между собою параллельны, а равно и ребра AB, CD, EF и GH. И такъ, вообще *параллелипипедъ есть призма, за основанія которой можно принять по произволу всякія двѣ противолежащія грани*; онѣ же называются *основаніями параллелипипеда*.

16*

Высотою параллелипипеда, какъ и призмы, называется разстояніе между основаніями.

Параллелипипедъ называется *прямымъ*, если его ребро перпендикулярно къ основанію.

Параллелипипедъ называется *прямоугольнымъ,* если его основаніе прямоугольникъ, котораго плоскость перпендикулярна къ ребру.

Въ прямомъ параллелипипедѣ основанія — параллелограммы, а остальныя грани — прямоугольники.

Въ прямоугольномъ же параллелипипедѣ всѣ грани прямоугольники и слѣд. всѣ двугранные углы — прямые.

Наконецъ, параллелипипедъ называется *наклоннымъ*, если всѣ его грани параллелограммы.

Если три смежныя ребра прямоугольника параллелипипеда равны между собою, то всѣ его шесть граней будутъ квадраты, равные между собою, и тогда многогранникъ называется *кубомъ,* или *правильнымъ шестигранникомъ.* Въ немъ плоскіе, а также двугранные углы — прямые, и всѣ ребра равны между собою.

Предложеніе.

§ 456. *Квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелипипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его реберъ одного и того же трегранная угла.*

Пусть $ABCDE$ прямоугольный параллелипипедъ (фиг. 258); надо доказать, что

$$\overline{DF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2.$$

Треугольникъ BDF прямоугольный (§ 381), потому что ребро BF перпендикулярно къ плоскости основанія $ABCD$; поэтому $$\overline{DF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BF}^2;$$
изъ прямоугольнаго треугольника ABD, замѣтивъ предварительно, что $AD = BC$, получимъ
$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2;$$
поэтому $$\overline{DF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2.$$

Слѣдствіе. *Квадратъ діагонали куба равенъ утроенному квадрату его ребра.*

Предложенiе.

§ 457. *Боковая поверхность всякой призмы измѣряется произведенiемъ одного изъ ея боковыхъ реберъ на периметръ перпендикулярнаго къ нему сѣченiя.*

Пусть $abcde$ означаетъ сѣченiе призмы $ADA'D'$, перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ AA', BB' и т. д.; отсюда слѣдуетъ, что ab перпендикулярно къ AA', bc перпендикулярно къ BB' и т. д. (§ 380). При вычисленiи площадей параллелограммовъ, составляющихъ *боковую поверхность* призмы, примемъ ребра AA' BB',... за ихъ основанiя; высотами будутъ прямыя ab, bc, и т. д.; поэтому, боковая поверхность призмы равна

Фиг. 259-я.

$$AA' \cdot ab + BB' \cdot bc + CC' \cdot cd + \text{ и т. д.}$$

Но боковыя ребра призмы равны между собою, $AA' = BB' = CC'$ и т. д. (§ 449); слѣдовательно, предъидущее выраженiе имѣетъ общимъ множителемъ AA'; отдѣливъ его за скобки, получимъ

$$AA'(ab + bc + cd + \ldots).$$

Множитель въ скобкахъ означаетъ периметръ сѣченiя, перпендикулярнаго къ боковымъ ребрамъ.

§ 458. Слѣдствiе. *Боковая поверхность прямой призмы измѣряется произведенiемъ периметра ея основанiя на высоту*; потому что въ прямой призмѣ основанiе перпендикулярно къ боковому ребру, а это послѣднее есть высота призмы.

Примѣчанiе. Здѣсь надобно припомнить замѣчанiе, сдѣланное относительно измѣренiя площадей (§ 281). Такъ, чтобы найти, напримѣръ, число квадратныхъ футовъ, содержащихся въ боковой поверхности прямой призмы, надобно узнать, сколько разъ линейный футъ содержится въ периметрѣ основанiя и въ боковомъ ребрѣ, и числа эти перемножить.

§ 459. Чтобы найти полную поверхность какой бы то ни было призмы, надобно къ боковой ея поверхности придать удвоенное основанiе.

Предложенiе.

§ 460. *Боковая поверхность правильной пирамиды измѣряется половиною произведенiя ея периметра основанiя на апоѳему пирамиды* (фиг. 255).

Боковую поверхность пирамиды $SABCD$ составляютъ равнобедренные треугольники ABS, BCS,...; за основанія ихъ возьмемъ стороны AB, BC,....; высоты треугольниковъ будутъ равныя между собою (§ 447); слѣд. боковая поверхность правильной пирамиды равна

$$\tfrac{1}{2}AB \cdot SF + \tfrac{1}{2}BC \cdot SF + \tfrac{1}{2}CD \cdot SF + \tfrac{1}{2}AD \cdot SF,$$

$$\text{или } \tfrac{1}{2}(AB + BC + CD + AD) \times SF,$$

гдѣ множитель, заключенный въ скобкахъ, есть периметръ основанія пирамиды, а SF — апоѳема пирамиды.

§ 461. Слѣдствіе. Чтобы получить полную поверхность правильной пирамиды, надо къ боковой ея поверхности придать площадь основанія. Назвавъ периметръ основанія пирамиды буквою P, найдемъ, что полная поверхность равна $\frac{1}{2}P(OF + SF)$.

§ 462. Для полученія поверхности какого нибудь многогранника, надобно найти площадь каждой грани, въ чемъ не будетъ затрудненія, потому что показано было, какъ найти площадь всякаго многоугольника, и взять сумму полученныхъ чиселъ.

---

28. Равенство и подобіе многогранниковъ вообще, и въ особенности призмъ и пирамидъ. — Сравненіе поверхностей подобныхъ многогранниковъ. — Отношеніе между площадями сѣченій пирамиды плоскостями, параллельными ея основанію.

Предложеніе.

§ 463. *Двѣ призмы равны между собою, если двугранный уголъ при основаніи и двѣ составляющія его грани въ одной равны двугранному углу при основаніи и двумъ гранямъ, его составляющимъ, въ другой; притомъ, если части эти одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ $BC = B'C'$, грань $ABCD = A'B'C'D'$ и $BCHG = B'C'H'G'$. Такъ какъ грани эти, по условію, одинаково расположены, то $\angle ABC = A'B'C'$ и $\angle CBG = \angle C'B'G'$; слѣд. трегранные углы B и B' равны между собою (§ 436). Всѣ боковыя ребра въ обѣихъ призмахъ также равны, потому что изъ равенства граней $BCHG$ и $B'C'H'G'$ слѣдуетъ, что $BG = B'G'$. Вслѣдствіе этого, если вмѣстимъ призму $A'B'C'D'H'$ въ призму $ABCDH$ такъ, чтобы вершины основанія $A'B'C'D'$

совпали съ вершинами основанія $ABCD$, то, по равенству трегранныхъ угловъ B и B', ребро $B'G'$ пойдетъ по BG, и точка G' совпадетъ съ G; остальныя же ребра пойдутъ по соотвѣтствующимъ ребрамъ, напримѣръ $A'F'$ по AF; въ противномъ случаѣ были бы двѣ параллельныя къ одной прямой, потому что всѣ боковыя ребра параллельны между собою; а, по равенству реберъ, вершины F', H', G' и I' совпадутъ съ F, H, G и I. Значитъ, всѣ грани обѣихъ призмъ совмѣстились; отсюда заключаемъ, что призмы равны между собою.

Фиг. 260-я.

§ 464. Слѣдствіе. *Двѣ призмы равны между собою, если грани какого нибудь трегранняго угла въ одной равны и одинаково расположены съ гранями трегранняго угла въ другой.*

Пусть грани: $AG = A'G'$, $ABCD = A'B'C'D'$ и $BH = B'H'$.

Грани эти, по условію, расположены одинаково; поэтому $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ABG = \angle A'B'G'$ и $\angle CBG = \angle C'B'G'$. Итакъ, въ трегранныхъ углахъ B и B' плоскіе углы равны и одинаково расположены; слѣд. трегранные углы равны, и двугр. уголъ $BC = B'C'$; а какъ грани, прилежащія къ этимъ двуграннымъ угламъ, равны и одинаково расположены, то, на основаніи предъидущаго предложенія, заключаемъ о равенствѣ призмъ.

Предложеніе.

§ 465. *Прямыя призмы равны между собою, если ихъ основанія и высоты равны.*

Дѣйствительно, если вмѣстить одну призму въ другую такъ, чтобы основанія ихъ совмѣстились, то боковыя ребра также совмѣстятся, потому что они перпендикулярны къ основаніямъ; а по равенству этихъ реберъ, верхнія основанія тоже совмѣстятся.

Предложеніе.

§ 466. *Двѣ пирамиды равны между собою, если двугранный уголъ при основаніи и двѣ составляющія его грани одной равны двугранному углу при основаніи и двумъ гранямъ въ другой; притомъ, если части эти одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ $AB = A'B'$, грани: $ABCD = A'B'C'D'$, $ABS = A'B'S'$. Вслѣдствіе одинаковаго расположенія граней, трегранный уголъ $B = B'$ (§ 436); слѣд., если совмѣстить основанія $A'B'C'D'$ и $ABCD$, то ребро $B'S'$ пойдетъ по BS; а, по равенству ихъ, вершина S' совпадетъ съ S; слѣд. пирамиды равны между собою.

Фиг. 261-я.

§ 467. Слѣдствіе. *Двѣ пирамиды равны между собою, если грани какого нибудь трегранного угла одной пирамиды равны и одинаково расположены съ гранями угла въ другой.*

Пусть грани: $ABCD = A'B'C'D'$, $ABS = A'B'S'$ и $BCS = B'C'S'$. Грани расположены одинаково; поэтому $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ABS = \angle A'B'S'$, $\angle CBS = \angle C'B'S'$; слѣдов. трегранные углы B и B' равны между собою (§ 437), а съ тѣмъ вмѣстѣ двугранный $AB = A'B'$, и какъ прилежащія къ нимъ грани равны, то и самыя пирамиды равны (§ 463).

§ 468. *Два многогранника называются подобными, если двугранные углы одного, порознь, равны двуграннымъ угламъ другого, грани ихъ соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ подобныхъ многогранникахъ многогранные углы соотвѣтственно равны. И дѣйствительно, вслѣдствіе подобія граней, плоскіе углы, при вершинѣ какого нибудь многограннаго угла, равны плоскимъ угламъ при вершинѣ въ другомъ многогранникѣ; двугранные углы въ этихъ многогранныхъ углахъ соотвѣтственно равны, по опредѣленію; притомъ части эти одинаково расположены; слѣдовательно многогранные углы можно совмѣстить.

Ребра, соединяющія вершины равныхъ угловъ въ подобныхъ многогранникахъ, называются *сходственными ребрами.*

Сходственныя ребра подобныхъ многогранниковъ пропорціональны; потому что они суть сходственные бока подобныхъ многоугольниковъ.

§ 469. Вслѣдствіе опредѣленія подобныхъ многогранниковъ:

1) *Кубы всегда подобны;* потому что двугранные ихъ углы соотвѣтственно равны, какъ прямые; а грани, какъ квадраты, всегда подобны.

2) *Прямоугольные параллелипипеды подобны, если три ребра трегранного угла въ одномъ пропорціональны такимъ же ребрамъ въ другомъ.* Дѣйствительно, двугранные углы въ прямоугольныхъ параллелипипедахъ суть прямые углы; слѣд. равны между собою; грани этихъ параллелипипедовъ суть прямоугольники, которые подобны (§ 252).

Предложеніе.

§ 470. *Двѣ призмы подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, а грани, составляющія эти углы, соотвѣтственно подобны и одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ $AB = ab$, грани $ABIK$ и $ABCDE$ соотвѣтственно подобны гранямъ $abik$ и $abcde$. По условію, эти грани расположены одинаково; слѣд. $\angle BAE = \angle bae$ и $\angle BAK = \angle bak$; значитъ, въ трегранныхъ углахъ A и a двугранные углы AB и ab равны, и прилежащіе къ нимъ плоскіе углы равны и одинаково расположены; поэтому и трегранные углы равны (§ 436). Вслѣдствіе этого равенства, двугранный уголъ $AK = ak$, двугранный уголъ $AE = ae$, и $\angle KAE = \angle kae$; сверхъ того, изъ подобія граней слѣдуетъ

Фиг. 262-я.

$$AK : ak = AB : ab,$$
$$AE : ae = AB : ab,$$

отсюда $AK : ak = AE : ae$;

такимъ образомъ въ параллелограммахъ AF и af между пропорціональными боками находятся равные углы; слѣд. эти параллелограммы подобны.

Примѣняя къ двуграннымъ угламъ AE и ae и гранямъ, ихъ составляющимъ, все, сказанное относительно двугранныхъ угловъ AB и ab и граней, ихъ составляющихъ, найдемъ, что трегранные углы E и e равны; а вслѣдствіе этого и двугранные углы EF и ef, ED и ed также равны, притомъ — грани DF и df подобны. Продолжая эти послѣдовательныя разсужденія, найдемъ: 1) что въ обѣихъ призмахъ двугранные углы, образуемые боковыми гранями между собою и съ нижними основа-

ніями равны между собою; остальные же двугранные углы, образуемые верхними основаніями съ боковыми гранями, равны, потому что они служатъ дополненіями до двухъ прямыхъ двугранныхъ угловъ угламъ при нижнихъ основаніяхъ, а эти послѣдніе равны между собою. 2) Боковыя грани въ обѣихъ призмахъ подобны: нижнія основанія подобны по условію, а верхнія, какъ соотвѣтственно равныя нижнимъ, тоже подобны. И такъ, въ обѣихъ призмахъ двугранные углы соотвѣтственно равны, всѣ грани подобны и одинаково расположены; поэтому призмы подобны.

§ 471. Слѣдствіе 1. *Двѣ призмы подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ въ другой.*

Дѣйствительно, если грани $ABCDE$ и $abcde$ подобны (фиг. 262), AF подобна af, AI подобна ai и притомъ всѣ одинаково расположены, то плоскіе углы при вершинахъ A и a трегранныхъ угловъ соотвѣтственно равны; а слѣд. и двугранные углы равны. И такъ, двугран. уголъ $AB=ab$, грань $ABCDE$ подобна $abcde$, грань AI подобна ai, притомъ грани эти одинаково расположены; слѣд. призмы подобны.

§ 472. Слѣдствіе 2. *Двѣ прямыя призмы подобны, если основанія ихъ подобны и высоты пропорціональны сходственнымъ бокамъ основаній.*

Дѣйствительно, двугранные углы при основаніяхъ — прямые (§ 452); поэтому, напримѣръ, двугранный уголъ $AB=ab$ (фиг. 262); по условію, высоты пропорціональны сходственнымъ бокамъ основаній, слѣд. $AK:ak=AB:ab$; поэтому прямоугольники AI и ai подобны; основанія призмъ, по условію, подобны. И такъ, двѣ прямыя призмы удовлетворяютъ условіямъ предъидущаго предложенія, слѣд. онѣ подобны.

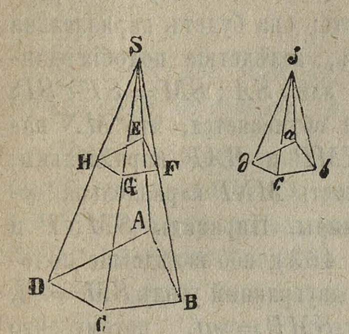
Предложеніе.

§ 473. *Двѣ пирамиды подобны, если двугранный уголъ при основаніи въ одной равенъ двугранному углу при основаніи въ другой, и грани, составляющія эти углы, подобны и одинаково расположены.*

Пусть двугранный уголъ $AB=ab$, а грани $ABCD$ и $abcd$, ABS и abs подобны. Вслѣдствіе одинаковаго расположенія граней, $\angle BAD=\angle bad$, $\angle BAS=\angle bas$, и какъ двугранный уголъ

$AB = ab$, то трегранный уголъ $A = a$; поэтому двугранный уголъ $SA = sa$ и $AD = ad$; притомъ $\angle SAD = \angle sad$. Изъ подобія граней, прилежащихъ къ двуграннымъ угламъ AB и ab, имѣемъ

Фиг. 263-я.



$$SA : sa = AB : ab,$$
и
$$AD : ad = AB : ab;$$
отсюда
$$SA : sa = AD : ad.$$

Поэтому въ треугольникахъ ASD и asd между двумя пропорціональными сторонами лежатъ равные углы, $\angle SAD = \angle sad$; слѣд. треугольники подобны.

Ясно, что все сказанное здѣсь о двугранныхъ углахъ AB и ab и прилежащихъ къ нимъ граняхъ, относится также къ двуграннымъ угламъ AD и ad. И дѣйствительно, равны они, а грани, къ нимъ прилежащія, подобны и одинаково расположены; слѣд. двугранный уголъ $SD = sd$, $CD = cd$ и треугольникъ CDS подобенъ cds. Продолжая такимъ образомъ, найдемъ, что двугранные углы въ обѣихъ пирамидахъ равны, а всѣ грани подобны и одинаково расположены, — слѣд. пирамиды подобны.

§ 474. Слѣдствіе. *Двѣ пирамиды подобны, если три грани, составляющія трегранный уголъ одной, подобны и одинаково расположены съ тремя гранями, составляющими трегранный уголъ въ другой.*

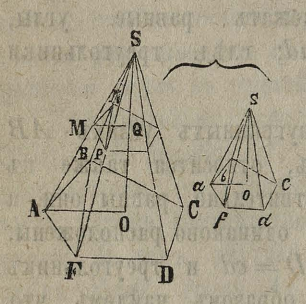
Дѣйствительно, если грань $ABCD$ подобна $abcd$, ABS подобна abs, ADS подобна ads, притомъ грани эти одинаково расположены, то плоскіе углы треграннаго угла A равны угламъ треграннаго угла a; а вслѣдствіе этого равенства и одинаковаго расположенія упомянутыхъ угловъ, двугранный уголъ $AB = ab$. И такъ, въ двухъ пирамидахъ двугранные углы при основаніи равны, $\angle AB = \angle ab$, грани, составляющія эти углы, подобны, $ABCD$ подобна $abcd$, ADS подобна ads; слѣд. пирамиды подобны.

Предложеніе.

§ 475. *Въ подобныхъ пирамидахъ сходственныя ребра пропорціональны высотамъ* (фиг. 264).

Пусть пирамиды $ABCDFS$ и $abcdfs$ подобны между собою, а SO и so означаютъ ихъ высоты; докажемъ, что $SO : so = AS : as$. Отложимъ $SM = sa$, $SP = sf$ и $SN = sb$, и черезъ точки M, N и P проведемъ плоскость; она будетъ параллельна основанію $ABCDF$. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе подобія данныхъ пирамидъ, $SA : sa = SF : sf$, или $SA : SM = SF : SP$; значитъ MP параллельна AF; также объясняется, что MN параллельна AB; слѣд. бока угловъ NMP и BAF параллельны; поэтому плоскость MNP параллельна основанію пирамиды. Пирамиды $SMNP$ и $sabf$ равны (§ 463); ибо вслѣдствіе подобія пирамидъ, двугранный уголъ $SM = sa$, треугольникъ $SMP = saf$, потому что бокъ $SM = as$, $\angle MSP = \angle asf$, и $\angle SMP = \angle SAF = \angle saf$; такъ же докажется, что треугольникъ $MNS = sab$. Равныя пирамиды $SMNP$ и $sabf$ совмѣщаются; причемъ и высоты ихъ совмѣстятся, т. е. $SQ = so$. Наконецъ, плоскость, проведенная черезъ двѣ линіи AS и SO, пересѣчетъ параллельныя плоскости по линіямъ MQ и AO, параллельнымъ между собою; слѣд.

Фиг. 264-я.



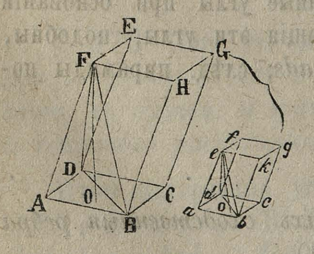
$$SO : QS = SA : SM, \text{ или } SO : so = SA : sa.$$

Предложеніе.

§ 476. *Въ подобныхъ призмахъ сходственныя ребра пропорціональны высотамъ.*

Пусть призмы $ABCDG$ и $abcdg$ подобны; проведемъ высоты FO и eo; докажемъ, напримѣръ, что $FO : eo = AF : ae$.

Фиг. 265-я.



Проведя плоскости черезъ прямыя AF и BF, ae и be, получимъ подобныя пирамиды $FABD$ и $eabd$; въ самомъ дѣлѣ—двугранный уголъ $AF = ae$ треугольники ABF и abe, ADF и ade подобны и одинаково расположены, потому что подобные многоугольники разбиваются на треуголь-

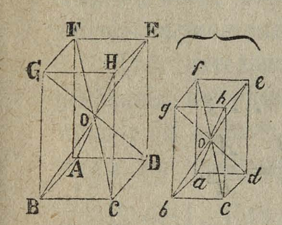
ники подобные. А въ подобныхъ пирамидахъ ребра пропорціональны высотамъ; слѣдовательно $FO : eo = AF : ae$.

Предложеніе.

§ 477. *Два подобные многогранника можно разбить на подобныя и одинаково расположенныя пирамиды.*

Пусть многогранники $ABCDG$ и $abcdg$ подобны. Черезъ какую нибудь точку O, взятую внутри перваго многогранника, и всѣ ребра его проведемъ плоскости; отъ взаимнаго ихъ пересѣченія получимъ столько пирамидъ $OABCD$, $OABGF$,..., сколько граней въ данномъ многогранникѣ; грани эти будутъ основаніями пирамидъ, а вершиною для всѣхъ будетъ точка O. Черезъ ребро ab, сходственное съ AB, проведемъ плоскость abo, которая бы съ плоскостью $abcd$ составила уголъ, равный двугранному углу $OABC$; въ плоскости abo нанесемъ уголъ

Фиг. 266-я.



$$bao = \angle BAO, \text{ и уголъ } abo = \angle ABO.$$

Изъ точки o разобьемъ второй многогранникъ на пирамиды $abcdo$, $abgfo$..., подобно тому, какъ это сдѣлано съ первымъ многогранникомъ. Пирамиды $OABCD$ и $oabcd$ подобны, потому что у нихъ двугранный уголъ $OABC = oabc$, и грани, ихъ составляющія, $ABCD$ и $abcd$, ABO и abo, подобны.

Теперь обратимся къ пирамидамъ $OABFG$ и $oabfg$. Такъ какъ углы $FABC$ и $fabc$ данныхъ многоугольниковъ равны, углы $OABC$ и $oabc$ также равны, то разности ихъ, т. е. двугранные углы $OABG$ и $oabg$ равны. Грани, ихъ составляющія, подобны: ABO и abo, $ABGF$ и $abgf$. Перейдемъ къ слѣдующимъ пирамидамъ $OGHEF$ и $oghef$: двугранные углы $AGFE$ и $agfe$ данныхъ многогранниковъ равны, углы $OGFA$ и $ogfa$ также равны, вслѣдствіе подобія прежнихъ пирамидъ; слѣдовательно и разности ихъ $OGFE$ и $ogfe$ равны между собою; грани, составляющія эти углы, OFG и ofg, подобны — какъ грани подобныхъ вторыхъ пирамидъ, а грани $GHEF$ и $ghef$ подобны — какъ грани данныхъ многогранниковъ... и т. д.

Предложение.

§ 478. *Поверхности подобныхъ многогранниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ реберъ.*

Пусть $Q, Q', Q''\ldots$, означаютъ площади граней одного многогранника; $q, q' q'', \ldots$ — площади соотвѣтственныхъ имъ граней другаго многогранника, который подобенъ первому; положимъ еще, что A и a означаютъ сходственныя ребра въ обоихъ многогранникахъ.

Такъ какъ площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ, а такіе бока, или ребра въ подобныхъ многогранникахъ, пропорціональны; слѣдовательно и квадраты ихъ пропорціональны; поэтому

$$Q : q = A^2 : a^2,$$
$$Q' ; q' = A^2 : a^2,$$
$$Q'' : q'' = A^2 : a^2,$$
и т. д.

слѣд. $$Q : q = Q' : q' = Q'' : q'' = \ldots\ldots;$$

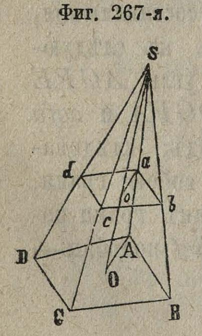
отсюда $$\frac{Q + Q' + Q'' + \ldots\ldots}{q + q' + q'' + \ldots\ldots} = \frac{Q}{q} = \frac{A^2}{a^2}.$$

Предложение.

§ 479. *Сѣченіе, параллельное основанію пирамиды есть многоугольникъ, подобный основанію; а площади основанія пирамиды и сѣченія пропорціональны квадратамъ разстояній ихъ отъ вершины пирамиды.*

Пусть сѣченіе $abcd$ параллельно основанію, SO перпендикулярно къ нему; докажемъ

Фиг. 267-я.



1) Что многоугольники $ABCD$ и $abcd$ подобны. Въ самомъ дѣлѣ, углы ихъ соотвѣтственно равны, потому что бока ихъ параллельны; напримѣръ AB параллельна ab, какъ сѣченія параллельныхъ плоскостей плоскостью ABS. Вслѣдствіе параллельности прямыхъ AB и ab, BC и $bc, \ldots$, имѣемъ

$$AB : ab = AS : aS,$$
$$BC : bc = BS : bS, \text{ и т. д.}$$

По равенству вторыхъ отношеній (§ 232), и первыя равны, т. е. $AB : ab = BC : bc = ...$ Такимъ образомъ бока многоугольниковъ пропорціональны; слѣдовательно — многоугольники подобны.

2) Извѣстно, что площади подобныхъ многоугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ боковъ; значитъ

$$ABCD : abcd = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Проведя плоскость черезъ высоту SO и ребро AS, получимъ параллельныя сѣченія AO и ao; слѣд. $SO : So = AS : aS$, или $SO : So = AB : ab$; возвысивъ члены этой пропорціи въ квадратъ и сравнивъ полученный выводъ съ предъидущею пропорціею, найдемъ

$$ABCD : abcd = \overline{SO}^2 : \overline{So}^2.$$

§ 480. Слѣдствіе 1. *Въ двухъ пирамидахъ, имѣющихъ равныя высоты, площади сѣченій, параллельныхъ основаніямъ и равно-отстоящихъ отъ вершинъ, пропорціональны основаніямъ.*

Дѣйствительно, составивъ пропорціи, выражающія отношенія основанія къ сѣченію въ каждой пирамидѣ, найдемъ, что эти пропорціи имѣютъ по равному отношенію квадрата высоты пирамиды къ квадрату разстоянія отъ вершины до сѣченія.

§ 481. Слѣдствіе 2. *Въ двухъ пирамидахъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, площади сѣченій, параллельныя основаніямъ и равно-отстоящія отъ вершинъ, равномѣрны между собою.*

И дѣйствительно, если Q' и Q означаютъ равномѣрныя основанія двухъ пирамидъ, имѣющихъ одинаковыя высоты, а q и q' — сѣченія, параллельныя основаніямъ и равно-отстоящія отъ вершинъ, то $Q : q = Q' : q'$; но $Q = Q'$; слѣд. $q = q'$.

Измѣреніе объемовъ многогранниковъ.

1. Объемъ тѣла. — Отношеніе объемовъ прямоугольныхъ параллелипипедовъ при равныхъ основаніяхъ. Отношеніе объемовъ прямоугольныхъ параллелипипедовъ вообще.—Объемъ прямоугольнаго параллелипипеда.—Равномѣрность параллелипипедовъ при равныхъ основаніяхъ и высотахъ. — Объемъ какого ни есть параллелипипеда. — Отношеніе объемовъ двухъ параллелипипедовъ [1]).

§ 482. *Объемомъ* тѣла, какъ извѣстно, называется пространство, занимаемое этимъ тѣломъ. Когда тѣло есть пустой

---

[1]) Этимъ вопросомъ (билетемъ) начинается курсъ VII класса по программѣ кадетскихъ корпусовъ.

сосудъ, то названіе объемъ часто замѣняютъ словомъ *вмѣстимость*. Тѣла, различныя по виду и, слѣдовательно, несовмѣстимыя, очевидно, могутъ быть равны по объему. Такія тѣла называются *равномѣрными*.

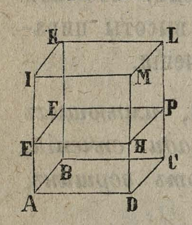
За единицу при измѣреніи объемовъ принимается кубъ, котораго ребро равно линейной единицѣ: такъ, если ребро куба есть футъ, дюймъ и т. п., то кубъ называется кубичнымъ футомъ, кубичнымъ дюймомъ и т. п.

Предложеніе.

§ 483. *Объемы прямоугольныхъ параллелипипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны своимъ высотамъ.*

Пусть $ABCDP$ прямоугольный параллелипипедъ; за основаніе его примемъ $ABCD$; высота будетъ AE. Увеличимъ высоту: для этого на продолженной AE возьмемъ какую нибудь длину AI, которая больше AE. Проведя черезъ точку I плоскость, параллельную основанію, до пересѣченія съ продолженными боковыми гранями, получимъ, прямоугольный параллелипипедъ AL. Дѣйствительно, грани многогранника AL попарно параллельны; слѣдовательно онъ параллелипипедъ, а основаніе его $ABCD$ — прямоугольникъ, котораго плоскость перпендикулярна къ ребру AI; очевидно — онъ больше даннаго параллелипипеда AP. И такъ, съ увеличеніемъ высоты прямоугольнаго параллелипипеда увеличивается его объемъ, — это первое условіе пропорціональности (§ 336).

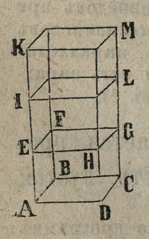
Фиг. 268-я.



Увеличимъ высоту AE, напримѣръ, въ 3 раза: для этого на продолженной высотѣ AE отложимъ $EI = IK = AE$, и черезъ точки I и K проведемъ плоскости IL и KM параллельно основанію $ABCD$.

Тѣми же разсужденіями, которыми выведено первое условіе пропорціональности, докажемъ, что многогранники EL и IM суть прямоугольные параллелипипеды; они равны AG; потому что у нихъ равныя основанія и высоты; слѣд. параллелипипедъ AM втрое больше параллелипипеда AG. И такъ, съ увеличеніемъ втрое высоты параллелипипеда увеличится также втрое соотвѣтствующій объемъ, — это второе условіе пропорціональности (§ 336).

Фиг. 269-я.

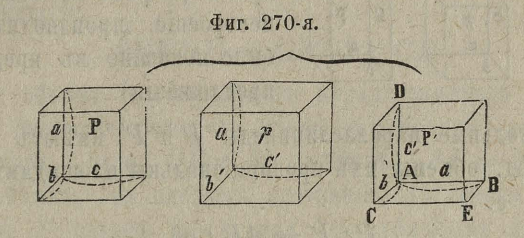


Предложеніе.

§ 484. *Объемы прямоугольныхъ параллелипипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны площадямъ основаній.*

Пусь P и p означаютъ прямоугольные параллелипипеды, имѣющіе общую высоту a, и положимъ, что b и c, b' и c' означаютъ бока основаній этихъ параллелипипедовъ; докажемъ, что $P:p=bc:b'c'$, гдѣ bc и $b'c'$ выражаютъ площади основаній параллелипипедовъ.

Фиг. 270-я.



Построимъ пар—дъ $ABCD$ или P' по тремъ прямымъ a, b и c'; для этого построимъ прямой уголъ BAC и отложимъ $AB=a$, $AC=b$, а изъ точки A возставимъ къ плоскости ABC перпендикуляръ $AD=c'$; наконецъ, черезъ точки B, C и D проведемъ плоскости, параллельныя гранямъ трегранного угла A; получимъ параллелипипедъ (§ 453); онъ прямоугольный, потому что основаніе его $ABEC$ прямоугольникъ, котораго плоскость перпендикулярна къ ребру AD.

Прямоугольные параллелипипеды P и P' имѣютъ равныя основанія, которыхъ бока суть a и b; слѣд. ихъ объемы пропорціональны высотамъ c и c':

$$P:P'=c:c'.$$

Параллелипипеды P' и p имѣютъ равныя основанія, которыхъ бока суть a и c'; слѣд. ихъ объемы пропорціональны высотамъ b и b', т. е.

$$P':p=b:b'.$$

Перемноживъ эти пропорціи, по сокращеніи P', получимъ

$$P:p=bc:b'c'.$$

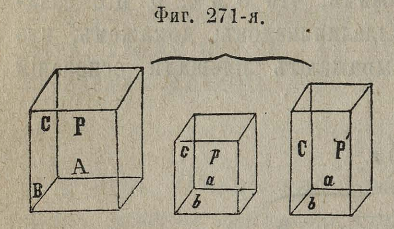
Предложеніе.

§ 485. *Прямоугольные параллелипипеды вообще пропорціональны произведеніямъ ихъ площадей основаній на высоты.*

Пусть P и p означають прямоугольные параллелипипеды, которыхъ ребра трегранныхъ угловъ суть A, B и C въ первомъ, и a, b и c во второмъ.

Докажемъ, что $P : p = AB \cdot C : ab \cdot c$, гдѣ AB и ab выражають площади основанiй параллелипипедовъ.

Фиг. 271-я.



Построимъ третiй прямоугольный параллелипипедъ P' по тремъ ребрамъ a, b и C (самое построенiе производится, какъ было показано въ предъидущемъ предложенiи).

Прямоугольные параллелипипеды P и P' имѣютъ равныя высоты C; слѣд. объемы ихъ пропорцiональны площадямъ основанiй (§ 484), т. е.

$$P : P' = AB : ab.$$

Прямоугольные параллелипипеды P' и p имѣютъ равныя основанiя ab; слѣдовательно объемы ихъ пропорцiональны высотамъ (§ 483), т. е.

$$P' : p = C : c.$$

Перемноживъ эти пропорцiи, получимъ

$$\frac{P}{p} = \frac{AB \times C}{ab \times c}.$$

Предложенiе.

§ 486. *Объемъ прямоугольнаго параллелипипеда измѣряется произведенiемъ площади его основанiя на высоту.*

Пусть требуется измѣрить прямоугольный параллелипипедъ $ABCDE$; значитъ, надо найти отношенiе его къ кубу $abcde$, котораго ребро равно линейной 1-цѣ. Такъ какъ кубъ есть въ то же время прямоугольный параллелипипедъ, то, на основанiи предъидущаго предложенiя, имѣемъ

Фиг. 272-я.

$$\frac{ABCDE}{abcde} = \frac{ABCD}{abcd} \times \frac{CE}{ce},$$

гдѣ *abcde*, *abcd* и *ce* означаютъ послѣдовательно единицы кубичную, квадратную и линейную. Поэтому имѣемъ

$$\frac{ABCDE}{1 \text{ куб.}} = \frac{ABCD}{1 \text{ кв.}} \times \frac{CE}{1 \text{ лин.}}$$

Отсюда заключаемъ, что въ прямоугольномъ параллелипипедѣ будетъ содержаться столько кубичныхъ единицъ, сколько заключается единицъ въ произведенiи чиселъ, происшедшихъ отъ измѣренiя площади основанiя параллелипипеда и его высоты. Для краткости пишутъ

$$ABCDE = ABCD \times CE$$

и читаютъ: объемъ прямоугольнаго параллелипипеда равенъ или измѣряется произведенiемъ его площади основанiя на высоту.

Напримѣръ, если $CE = 5$ дюймамъ, $AB = 2$ дюймамъ и $BC = 3$ дюймамъ, то площадь основанiя AC равна 3×2 или 6, а объемъ V равенъ 6×5 или 30 кубичнымъ дюймамъ.

§ 487. Слѣдствiе I. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что *объемъ прямоугольнаго параллелипипеда равенъ произведенiю трехъ реберъ его треграннаго угла, или произведенiю трехъ его измѣренiй*; потому что площ. $ABCD = AB \times BC$.

§ 488. Слѣдствiе II. *Объемъ куба равенъ третьей степени его ребра.*

И дѣйствительно, объемъ куба, какъ прямоугольнаго параллелипипеда, въ которомъ ребра треграннаго угла равны между собою, равенъ произведенiю трехъ равныхъ множителей, или третьей степени одного изъ нихъ.

На этомъ основанiи получаютъ отношенiя между кубичными мѣрами; напримѣръ, кубичная сажень $= 7^3$, или 343 куб. футамъ, кубичный футъ $= 12^3$, или 1728 кубичн. дюймамъ и т. п.

Предложенiе.

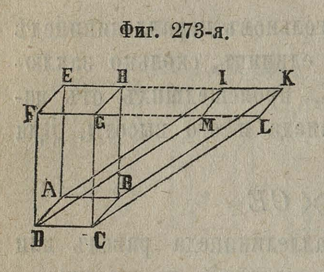
§ 489. *Параллелипипеды, имѣющiе равныя основанiя и высоты, равномѣрны.*

Совмѣстимъ нижнiя основанiя этихъ параллелипипедовъ, при чемъ верхнiя основанiя будутъ въ одной плоскости, потому что у параллелипипедовъ равныя высоты. Для доказательства предложенiя будемъ разсматривать два случая, смотря по тому, будутъ ли верхнiя основанiя лежать между параллельными ихъ боками или не будутъ.

1-й случай. Параллелипипеды *ABCDEFGH* и *ABCDIKLM* имѣютъ общее основаніе *ABCD*, а другія основанія лежатъ между параллельными линіями *EK* и *FL*.

Многогранникъ *AEIMDF* есть треугольная призма, потому что плоскости его *ADFE*, *ADMI* и *EIMF* пересѣкаются по параллельнымъ линіямъ *AD*, *IM* и *FE*, которыя ограничены параллельными плоскостями *AEI* и *DFM*; плоскости же эти параллельны по той причинѣ, что онѣ лежатъ въ противоположныхъ граняхъ параллелипипеда. Такъ же докажется, что многогранникъ *BHKCGL* есть призма. Призмы эти равны между собою.

Фиг. 273-я.

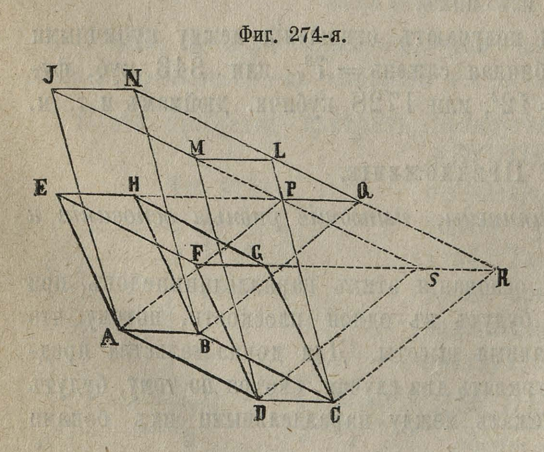


Въ самомъ дѣлѣ, въ треугольникахъ *AEI* и *BHK*, составляющихъ основанія призмъ, стороны: $AE = BH$, $AI = BK$, какъ противоположные бока въ параллелограммахъ, и углы между ними равны (§ 409); слѣд. треугольники эти равны; грань $AF = BG$, грань $AM = BL$; и такъ грани, составляющія трегранные углы *A* и *B* въ этихъ призмахъ, равны и одинаково расположены; значитъ, и самыя призмы равны. Отнявъ эти равныя отъ многогранника *ABCDLKEF*, получимъ равные остатки, т. е.

пар—дъ $ABCDEFGH =$ пар—ду $ABCDIKLM$.

2-й случай. Пусть *ABCD* общее основаніе двухъ параллелипипедовъ, а верхнія ихъ основанія *EFGH* и *JNLM* лежатъ въ одной плоскости, такъ какъ высоты параллелипипедовъ полагаются одинаковыми. Продолжимъ бока *JM*, *NL*, *EH* и *FG*; точки пересѣченій *P*, *Q*, *R* и *S* соединимъ соотвѣтственно съ *A*, *B*, *C* и *D*; получимъ параллелипипедъ *ABCDPQRS*, потому что его грани, какъ продолженія граней данныхъ парал-

Фиг. 274-я.



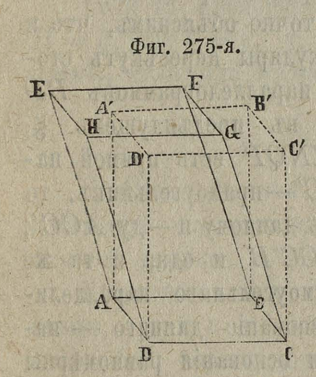
лелипипедовъ, параллельны между собою. На основанiи предъидущаго случая, параллелипипеды $ABCDH$ и $ABCDL$ равномѣрны, порознь, параллелипипеду $ABCDR$, слѣд. они равномѣрны между собою.

Предложенiе.

§ 490. *Всякiй параллелипипедъ можно обратить въ прямой, имѣющiй съ даннымъ одинаковыя основанiе и высоту.*

Возьмемъ какой нибудь параллелипипедъ $ABCDEFGH$, за основанiе его примемъ параллелограммъ $ABCD$, высотою будетъ разстоянiе между основанiями AC и HF. Изъ вершинъ A, B, C и D возставимъ перпендикуляры къ основанiю $ABCD$ до пересѣченiя съ плоскостью HF въ точкахъ A', B', C' и D'; черезъ параллельныя линiи AA' и DD', BB' и CC', AA' и BB', DD' и CC' проведемъ плоскости; прямыя $A'D'$, $B'C'$, $A'B'$ и $C'D'$ составятъ пересѣченiя упомянутыхъ плоскостей съ плоскостью FH. Такимъ образомъ получимъ параллелипипедъ $ABCDA'B'C'D'$; дѣйствительно, грани AC и $A'C'$ параллельны между собою; ибо грань $A'C'$ лежитъ въ плоскости FH, которая, по условiю, параллельна грани AC; остальныя четыре грани попарно, противоположныя, также параллельны; напримѣръ грань AD' параллельна грани BC', потому что бока угловъ DAA' и CBB' параллельны между собою. Полученный параллелипипедъ ACC' прямой, ибо ребро его AA' перпендикулярно къ плоскости основанiя AC; а на основанiи предъидущаго предложенiя, онъ равномѣренъ съ даннымъ параллелипипедомъ ACF, потому что у обоихъ общее основанiе $ABCD$ и одинаковыя высоты AA'.

Фиг. 275-я.



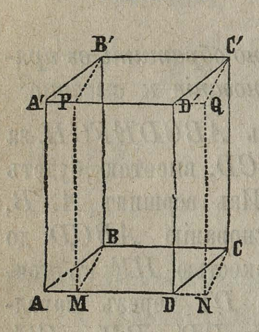
Предложенiе.

§ 491. *Всякiй прямой параллелипипедъ можно обратить въ прямоугольный, имѣющiй съ даннымъ равномѣрное основанiе и ту же высоту.*

Возьмемъ прямой параллелипипедъ $ABCDA'B'C'D'$, котораго основанiе параллелограммъ $ABCD$, а ребро AA' перпен-

дикулярно къ нему; слѣд. оно есть въ то же время высота параллелипипеда; боковыя грани BC', DC',... суть прямоугольники. Изъ вершины B, C, C' и B' грани $BCC'B'$ возставимъ къ ней перпендикуляры BM, CN, $C'Q$ и $B'P$; они пойдутъ по гранямъ даннаго параллелипипеда; напримѣръ, перпендикуляръ BM пойдетъ по грани BD; потому что грань BD перпендикулярна грани BC' (§ 426), и BM проведена черезъ точку B, взятую на сѣченіи ихъ, перпендикулярно къ плоскости BC'; слѣд. она лежитъ въ другой плоскости BD (§ 427); поэтому перпендикуляръ BM пересѣчетъ сторону параллелограмма $ABCD$ въ точкѣ M; такъ точно объяснимъ, что и остальные перпендикуляры пересѣкутъ стороны AD и $A'D'$ параллелограммовъ BD и $B'D'$. Разсужденіями, изложенными въ предъидущемъ §, докажемъ, что многогранникъ $BCC'B'MNQP$ есть прямой параллелипипедъ; а какъ основаніе его BC'—прямоугольникъ, то онъ прямоугольный (§ 455) и равномѣренъ данному п—ду ACC'; потому что у нихъ общее основаніе $BCC'B'$ и одна и та же высота BM. Принявъ за основаніе прямоугольнаго параллелипипеда прямоугольникъ $BCNM$, а за основаніе даннаго — параллелограммъ $ABCD$, найдемъ, что эти основанія равномѣрны (§ 289), и высоты AA' и MP параллелипипедовъ одинаковы.

Фиг. 276-я.



§ 492. Слѣдствіе. *На основаніи двухъ предъидущихъ предложеній, всякій параллелипипедъ можно обратить въ прямоугольный, съ основаніемъ равномѣрнымъ основанію даннаго параллелипипеда и съ одинаковою высотою.*

Предложеніе.

§ 493. *Объемъ всякаго параллелипипеда измѣряется произведеніемъ площади его основанія на высоту.*

Пусть V означаетъ объемъ какого ни есть параллелипипеда, Q—площадь его основанія, H высота. Обратимъ данный параллелипипедъ въ прямоугольный, котораго площадь основанія и высота будутъ тѣ же Q и H. На основаніи предъидущаго § и § 486, получимъ $V = QH$.

§ 494. Слѣдствіе I. *Объемы всякихъ параллелипипедовъ пропорціональны произведеніямъ ихъ основаній на высоты.*

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ какихъ нибудь параллелипипедовъ, Q и q — ихъ площади основаній, H и h — высоты. Имѣемъ $V = QH$, $v = qh$; отсюда $V : v = QH : qh$.

§ 495. Слѣдствіе II. Положивъ въ предъидущемъ равенствѣ, сперва $Q = q$, а потомъ $H = h$, получимъ послѣдовательно $V : v = H : h$, $V : v = Q : q$.

И такъ, *объемы всякихъ параллелипипедовъ, при равномѣрныхъ основаніяхъ, пропорціональны высотамъ; а при равныхъ высотахъ пропорціональны площадямъ основаній.*

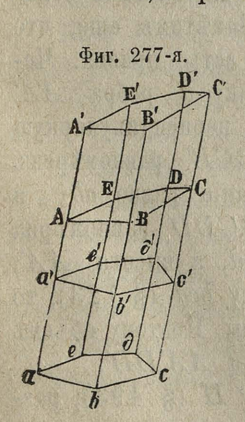
Если въ пропорціи $V : v = QH : qh$ одновременно $Q = q$ и $H = h$, то $V = v$, т. е. *объемы всякихъ параллелипипедовъ равны, если ихъ площади основаній и высоты равны.*

Предложеніе.

§ 496. *Всякая призма равномѣрна прямой призмѣ, имѣющей основаніемъ сѣченіе, перпендикулярное къ ребру данной призмы, а высотою — ребро ея.*

Возьмемъ какую нибудь призму ACA'; продолжимъ ея боковыя грани и отложимъ на продолженномъ ребрѣ AA' часть $aa' = AA'$; черезъ точки a и a' проведемъ плоскости ac и $a'c'$, перпендикулярныя къ ребру AA'; получимъ прямую призму acc'. Надо доказать, что призма ACA' равномѣрна прямой призмѣ acc'. Вслѣдствіе равенства $AA' = aa'$, получимъ $aA = a'A'$; а какъ $AA' = BB' = CC' = ..$ (§ 407), также $aa' = bb' = cc' = ...$; слѣд. $bB = b'B'$, $cC = c'C'$ и т. д. Вмѣстимъ многогранникъ acC въ $a'c'C'$ такъ, чтобы грань ac совмѣстилась съ гранью $a'c'$; по равенству ихъ это возможно; ребро aA пойдетъ по ребру $a'A'$, потому что оба они перпендикулярны къ совмѣстившимся гранямъ; точка A совпадетъ съ точкою A', по равенству линій aA и $a'A'$; точно такъ же объясниться, что вершины B, C, D и E соотвѣтственно совпадутъ съ вершинами, B', C', D' и E'. Поэтому многогранники acC и $a'c'C'$ равны между собою; а отнявъ отъ нихъ

Фиг. 277-я.



общую часть — многогранникъ $a'c'C$, получимъ равномѣрныя призмы acc' и ACC'.

---

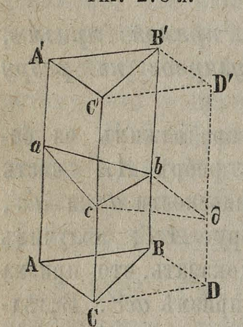
2. Объемъ треугольной и многогранной призмы. — Отношеніе объемовъ двухъ призмъ и въ особенности подобныхъ. — Два тетраэдра, имѣющіе равномѣрныя основанія и равныя высоты, равномѣрны между собою.

§ 497. *Объемъ треугольной призмы измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на высоту.*

Возьмемъ какую нибудь треугольную призму $ABCA'B'C'$, которой объемъ назовемъ буквою V; высоту ея означимъ черезъ H и докажемъ, что $V =$ площ. $ABC \times H$.

Черезъ точки C и B въ плоскости основанія ABC проведемъ CD и BD соотвѣтственно параллельно бокамъ AB и AC; черезъ пересѣкающіяся прямыя CD и CC', BD и BB' проведемъ плоскости до пересѣченій съ плоскостями основаній и между собою; получимъ параллелипипедъ ADD'; дѣйствительно грани BD' и AC' параллельны, потому что бока угловъ $B'BD$ и $A'AC$ параллельны между собою; по той же причинѣ грани CD' и AB' параллельны; грани AD и $A'D'$ параллельны, ибо лежатъ въ плоскостяхъ основаній данной призмы. Замѣтимъ еще, что многогранникъ $BCDD'$ есть призма. Черезъ какую нибудь точку a ребра AA' проведемъ плоскость ad, перпендикулярную къ ребру AA'. Объемъ данной призмы $ABCB'$ равномѣренъ съ объемомъ прямой призмы, которой основаніе равно abc, а высота равна ребру AA' (§ 496); призма $BCDD'$ равномѣрна прямой призмѣ, которой основаніе равно bcd, а высота AA'; а какъ треугольникъ abc равенъ треугольнику bcd (§ 123), то объемы призмъ $ABCB'$ и $BCDD'$ равномѣрны. Поэтому объемъ призмы $ABCB'$ составляетъ половину пар—да $AA'DD'$.

Фиг. 278-я.



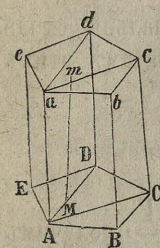
Объемъ пар—да $AA'DD' =$ пл. $ABDC \times H$ (§ 493); раздѣливъ обѣ части этого равенства на 2 и замѣтивъ, что половина пар—да $AA'DD'$ равна данной призмѣ $ABCB'$, а половина параллелограмма $ABDC$ равна треугольнику ABC, получимъ $V =$ площ. $ABC \times H$.

Предложенie.

§ 498. *Объемъ многогранной призмы измѣряется произведенiемъ площади ея основанiя на высоту.*

Возьмемъ какую нибудь призму $ABCDEabcde$, объемъ ея назовемъ V, основанiе — Q и высоту — H; докажемъ, что $V = Q \cdot H$.

Фиг. 279-я.



Разобьемъ данную призму на треугольныя призмы; для этого черезъ ребра Aa, и Dd, Aa и Cc проведемъ плоскости; такимъ образомъ искомый объемъ V равенъ суммѣ объемовъ треугольныхъ призмъ $ABCc$, $ACDd$ и $ADEe$. Объемъ треугольной призмы равенъ площади ея основанiя на высоту; слѣд.

$$V = ABC \cdot H + ACD \cdot H + ADE \cdot H$$

отсюда $V = (ABC + ACD + ADE) \times H$,

или $V = Q \cdot H$.

§ 499. Слѣдствiе. Пусть V и v означаютъ объемы какихъ нибудь призмъ, Q и q — ихъ основанiя, H и h — высоты. Изъ равенствъ

$$V = QH,\ v = qh \text{ имѣемъ } V : v = QH : qh,$$

т. е. *объемы призмъ пропорцiональны произведенiямъ площадей ихъ основанiй на высоты.*

Если $Q = q$, то $V : v = H : h$, т. е. *объемы призмъ, имѣющихъ равномѣрныя основанiя, пропорцiональны высотамъ.*

Если $H = h$, то $V : v = Q : q$, т. е. *объемы призмъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорцiональны площадямъ основанiй.*

Наконецъ, если одновременно $Q = q$ и $H = h$, то $V = v$, т. е. *объемы призмъ, имѣющихъ равномѣрныя основанiя и равныя высоты, равномѣрны.*

Примѣчанiе. Въ предложенiи § 498 и его слѣдствiяхъ заключается измѣренiе и зависимость объемовъ, найденныхъ въ предъидущихъ параграфахъ, потому что параллелипипеды и треугольная призма составляютъ частные случаи многогранной призмы.

Предложенie.

§ 500. *Объемы подобныхъ призмъ пропорцiональны кубамъ сходственныхъ реберъ.*

Возьмемъ двѣ подобныя призмы; пусть V и v означаютъ ихъ объемы, Q и q — основанія, H и h — высоты, A и a — сходственныя ребра.

На основаніи предъидущаго §, имѣемъ

$$\frac{V}{v} = \frac{Q}{q} \cdot \frac{H}{h}.$$

Но въ подобныхъ призмахъ высоты пропорціональны сходственнымъ ребрамъ, а площади основаній — квадратамъ этихъ реберъ, поэтому

$$\frac{H}{h} = \frac{A}{a} \text{ и } \frac{Q}{q} = \frac{A^3}{a^3};$$

вставимъ, вмѣсто $\frac{H}{h}$ и $\frac{Q}{q}$, имъ равныя, въ отношеніе $\frac{V}{v}$, получимъ

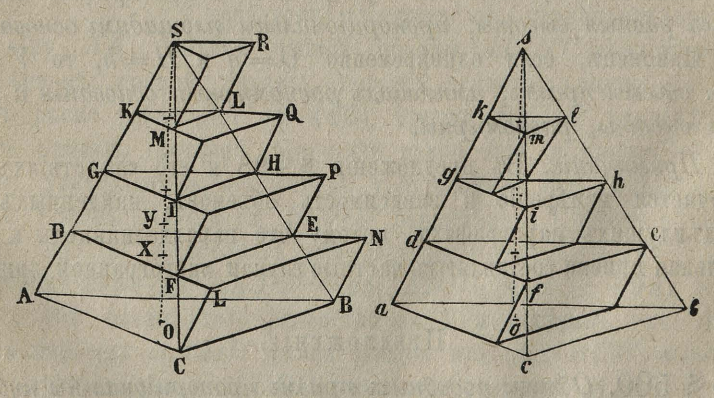
$$\frac{V}{v} = \frac{A^2}{a^2} \cdot \frac{A}{a}, \text{ или } \frac{V}{v} = \frac{A^3}{a^3}.$$

Предложеніе.

§ 501. *Можно въ тетраэдръ вписать и описать около него рядъ призмъ, разность объемовъ которыхъ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.*

Возьмемъ какой нибудь тетраэдръ, или что тоже треугольную пирамиду $ABCS$, примемъ треугольникъ ABC за основаніе,

Фиг. 280-я. Фиг. 281-я.



а перпендикуляръ SO, опущенный изъ вершины S на основаніе —

за высоту. Раздѣлимъ высоту эту на произвольное число равныхъ частей; черезъ точки дѣленія проведемъ плоскости DEF, GHI, KLM параллельно основанію ABC. Черезъ точки B и C въ плоскостяхъ ABC и ACS проведемъ BN и CN параллельно AS до пересѣченія съ продолженными DE и DF, получимъ призму $ABCN$ (§ 448).

Подобнымъ построеніемъ получимъ призмы $DEFP$, $GHIQ$, а для построенія послѣдней призмы проведемъ черезъ вершину S плоскость параллельную основанію ABC; такимъ образомъ получимъ рядъ описанныхъ призмъ, сумму ихъ означимъ черезъ Σ. Чтобы вписать рядъ призмъ, проведемъ черезъ точки M и L прямыя параллельно ребру AS до пересѣченія съ GI и GH, при построеніи этой призмы принято за основаніе треугольникъ KML, а за боковыя ребра прямыя параллельныя ребру AS; также построятся и другія вписанныя призмы, принимая послѣдовательно за основанія треугольники GHI, DEF, а за боковыя ребра — прямыя параллельныя линіи AS. Для ясности, вписанныя призмы построены на фиг. 281, гдѣ тетраэдръ $abcs$ и высота его so, а равно сѣченія klm, ghi, def означаютъ соотвѣтственно тетраэдръ, высоту и сѣченія даннаго тетраэдра. Назовемъ сумму вписанныхъ тетраэдровъ буквою Σ.

Сравнивая описанныя призмы со вписанными, построенными на одномъ и томъ же основаніи, найдемъ, что онѣ равномѣрны (§ 499), потому, что высотами у нихъ будутъ части, на которыя раздѣлена высота SO; такъ приз. $KMLR$ = приз. $kmlg$, приз. $GHIQ$ = приз. $ghid$, приз. $DFEP$ = приз. $defa$. Поэтому $\Sigma - \Sigma$ = приз. $ABCN$; основаніе послѣдней призмы есть треугольникъ ABC, высота ея есть $\frac{SO}{n}$, означая буквою n произвольное число, на которое раздѣлена высота. И такъ,

$$\Sigma - \Sigma = ABC \cdot \frac{SO}{n}$$

произведеніе это можетъ быть сдѣлано меньше всякаго даннаго количества, если n увеличивать произвольно (§ 332).

§ 502. Слѣдствіе I. *Въ тетраэдръ можно вписать и около него описать такіе ряды призмъ, увеличивая ихъ число, что разность между объемомъ тетраэдра и суммою призмъ вписанныхъ, а также и суммою призмъ описанныхъ, будетъ*

безконечно мала; поэтому что объемъ тетраэдра больше суммы вписанныхъ и меньше суммы описанныхъ призмъ.

§ 503. Слѣдствіе II. *Тетраэдръ есть предѣлъ суммы вписанныхъ въ немъ и описанныхъ около него призмъ, если постепенно увеличивать число этихъ призмъ.*

Пусть V означаетъ объемъ тетраэдра, Σ и $\sum$ — суммы вписанныхъ и описанныхъ призмъ. Съ увеличеніемъ числа призмъ, суммы Σ и $\sum$ будутъ перемѣнныя, а V — постоянное, притомъ разности $V - \Sigma$ и $\sum - V$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго числа (§ 502); слѣд. V есть предѣлъ для Σ и $\sum$.

Предложеніе.

§ 504. *Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны между собою.*

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ одинаковую высоту H и равномѣрныя основанія Q. Построеніемъ, изложеннымъ въ § 501, впишемъ одинаковое число призмъ въ обоихъ тетраэдрахъ; призмы эти соотвѣтственно будутъ равномѣрны, ибо высоты ихъ, составляющія одинаковую часть высоты H, равны между собою, а основанія равномѣрны, потому что находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ вершинъ пирамидъ (§ 481); значитъ и суммы вписанныхъ призмъ въ обоихъ тетраэдрахъ равны между собою, пусть Σ означаетъ эту сумму призмъ. *Такъ какъ* V *есть предѣлъ суммы вписанныхъ призмъ* Σ и v есть предѣлъ той же перемѣнной Σ, то $V = v$ (§ 335).

Въ концѣ руководства приведено доказательство, независимое отъ предѣловъ.

---

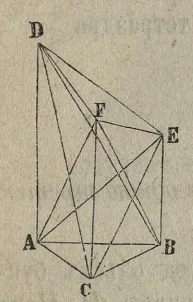
3. Разложеніе треугольной усѣченной призмы на три тетраэдра. — Объемъ тетраэдра, объемъ пирамиды. — Объемъ усѣченной призмы и пирамиды съ параллельными основаніями. — Отношеніе объемовъ двухъ пирамидъ, и въ особенности подобныхъ.

Предложеніе.

§ 505. *Объемъ усѣченной треугольной призмы равенъ суммѣ объемовъ трехъ тетраэдровъ, имѣющихъ общее основаніе съ усѣченною призмою, а вершины ихъ находятся въ вершинахъ сѣченія.*

Пусть ребра AD, CF и BE параллельны между собою, а плоскость DEF не параллельна ABC; поэтому многогранникъ $ABCDEF$ есть усѣченная треугольная призма, за основаніе которой примемъ треугольникъ ABC. Проведя плоскость черезъ точки A, B и F, раздѣлимъ усѣченную призму на тетраэдръ $ABCF$, котораго основаніе ABC и вершина въ F, и пирамиду $FABED$. Эта послѣдняя пирамида плоскостью, проходящею черезъ точки A, F и E, раздѣлится на два тетраэдра $FABE$ и $FADE$. Первый изъ нихъ съ тетраэдромъ $CABE$ имѣетъ общее основаніе ABE и равныя высоты, потому что вершины пирамидъ, находящіяся въ F и C, лежатъ на прямой, параллельной основанію ABE (§ 398).

Фиг. 282-я.



Тетраэдръ $FADE$ равномѣренъ съ тетраэдромъ $CDAB$, ибо основанія ихъ ADE и ADB равномѣрны (§ 293); а какъ вершины пирамидъ F и C лежатъ на линіи CF, параллельной плоскости основаній, то высоты равны. И такъ, усѣченная призма $ABCDEF$ равна суммѣ трехъ тетраэдровъ $FABC$, $EABC$ и $DABC$, которые удовлетворяютъ условіямъ предложенія.

§ 506. Слѣдствіе. Доказательство предъидущее нисколько не зависитъ отъ положенія сѣченія DEF относительно основанія ABC; поэтому предложеніе будетъ вѣрно и тогда, если сѣченіе DEF параллельно основанію, т. е. когда многогранникъ будетъ призма; а тогда, разстоянія отъ вершинъ D, E и F до основанія ABC тетраэдровъ равны между собою, и тетраэдры будутъ равномѣрны (§ 504).

Отсюда заключаемъ, что *треугольная призма разлагается на три равномѣрные тетраэдра, которыхъ основанія и высоты одинаковы съ основаніемъ и высотою призмы.*

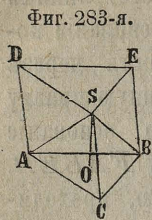
Предложеніе.

§ 507. *Объемъ тетраэдра измѣряется одною третью произведенія площади его основанія на высоту* (фиг. 283).

Пусть $SABC$ — тетраэдръ и V означаетъ его объемъ, ABC — его основаніе и SO — высота; надо доказать, что объемъ тетраэдра $V = \frac{1}{3} ABC \times SO$.

Проведемъ прямыя AD и BE параллельно ребру CS, а черезъ вершину S — плоскость DSE параллельно основанію ABC; получимъ треугольную призму $ABCDES$ (§ 448). На основаніи предъидущаго параграфа, тетраэдръ $SABC$ составляетъ треть призмы $ABCDES$; но объемъ призмы равенъ $ABC \times SO$ (§ 497); слѣд. объемъ тетраэдра

Фиг. 283-я.



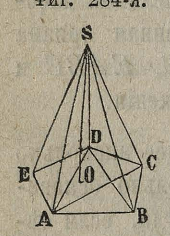
$$V = \frac{1}{3} ABC \times SO.$$

Предложеніе.

§ 508. *Объемъ всякой пирамиды измѣряется одною третью произведенія площади ея основанія на высоту.*

Пусть $SABCDE$ данная пирамида, назовемъ ея объемъ буквою V, основаніе — Q и высоту SO означимъ буквою H. Надо доказать, что $V = \frac{1}{3} QH$. Проведя плоскости черезъ ребра SA и SC, SA и SD, раздѣлимъ пирамиду на тетраэдры, которыхъ вершины можно принять совпадающими съ вершиною S пирамиды; слѣдовательно высоты этихъ тетраэдровъ и данной пирамиды будутъ одинаковы, если за основанія треугольныхъ пирамидъ примемъ треугольники ADE, ADC и ABC.

Фиг. 284-я.



Очевидно, что $V = SADE + SACD + SABC$ или, на основаніи предъидущаго предложенія,

$$V = \frac{1}{3} ADE \cdot H + \frac{1}{3} ACD \cdot H + \frac{1}{3} ABC \cdot H;$$

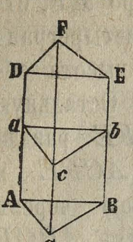
отсюда $V = \frac{1}{3}(ADE + ACD + ABC) \cdot H,$

или $V = \frac{1}{3} QH.$

Предложеніе.

§ 509. *Объемъ усѣченной треугольной призмы равенъ произведенію площади сѣченія, перпендикулярнаго къ боковому ребру, на одну треть суммы боковыхъ реберъ.*

Пусть ребра AD, CF и BE параллельны между собою; слѣдовательно многогранникъ $ABCDEF$ есть усѣченная призма. Проведеніемъ плоскости abc, перпендикулярной къ ребру AD, усѣченная призма разобьется на двѣ прямыя усѣченныя призмы $abcF$ и $abcC$; каждая изъ этихъ призмъ равна суммѣ трехъ тетраэдровъ, у которыхъ общее основаніе abc, и вершины нахо-



Фиг. 285-я.

дятся для одной въ точкахъ D, E, F; а для другой въ A, B, C (§ 505); а какъ ребра перпендикулярны къ основанію abc, то Da, Fc и проч. будутъ высотами этихъ тетраэдровъ. Поэтому

$$\text{объемъ } abcF = \tfrac{1}{3}abc\ (aD + cF + bE)$$
$$\text{и объемъ } abcC = \tfrac{1}{3}abc\ (aA + cC + bB).$$

Сложивъ эти равенства, выведя abc за скобку, и замѣтивъ, что

$$aD + aA = AD,\ cF + cC = CF \text{ и } Bb + bE = BE,$$

получимъ объемъ $ABCDEF = abc. \dfrac{AD + CF + BE}{3}$.

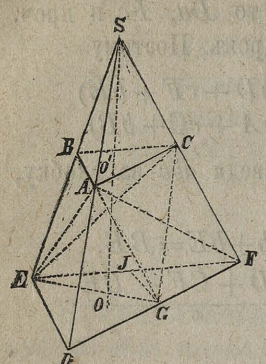
Предложеніе.

§ 510. *Объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями равенъ суммѣ трехъ пирамидъ, у которыхъ одинаковыя высоты съ усѣченной пирамидой; а основаніями будутъ соотвѣтственно два основанія усѣченной пирамиды и многоугольникъ, котораго площадь есть средняя пропорціональная между площадями первыхъ двухъ основаній.*

Пусть Q и q означаютъ основанія усѣченной многогранной пирамиды, H — высоту данной пирамиды, h — разстояніе отъ вершины пирамиды до сѣченія q, k — высоту усѣченной пирамиды, т. е. $k = H - h$; V и v — объемы пирамидъ данной и отсѣченной отъ нея. Построимъ треугольникъ EDF (фиг. 286), равномѣрный большему основанію Q данной многогранной пирамиды; изъ какой нибудь точки O этого основанія вообразимъ перпендикуляръ къ его плоскости, и отложимъ $OS = H$; черезъ точку S и каждую изъ сторонъ DE, DF и EF проведемъ плоскости, получимъ треугольную пирамиду $SDEF$; проведемъ еще плоскость ABC параллельно основанію DEF на разстояніи $SO' = h$, получимъ сѣченіе ABC, равномѣрное съ площадью сѣченія q данной многогранной пирамиды (§ 481). Объемы пирамидъ V и $SDEF$, при равныхъ высотахъ и равномѣрныхъ основаніяхъ $Q = DEF$, равномѣрны (§ 504); также объяснится, что объемы пирамидъ v и $SABC$ равномѣрны; слѣд. и разности ихъ равномѣрны, т. е. данная усѣченная пирамида равномѣрна усѣченной треугольной пирамидѣ $DEFABC$. И такъ, доказательство предложенія для всякой усѣченной пирамиды сводится къ разсмотрѣнію усѣченной треугольной пирамиды.

Плоскостью, проведенною черезъ точку A и ребро EF, отдѣлимъ отъ усѣченной пирамиды четырегранникъ $ADFE$; у него основаніе и высота общія съ усѣченной пирамидой. Остальную четырегранную пирамиду $ABCFE$ раздѣлимъ на двѣ трехстороннія $ACFE$ и $ABCE$ плоскостью, проведенною черезъ ребра AC и AE; у одной изъ нихъ $ABCE$ служитъ верхнее основаніе усѣченной, при одинаковой высотѣ, потому то вершина находится въ E. Значитъ, получатся уже двѣ такія пирамиды, о которыхъ сказано въ предложеніи.

Фиг. 286-я.



Отложимъ $FG = CA$ и проведемъ плоскость черезъ точку G и прямую CE, пересѣкающую грани SFD и FDE по линіямъ CG и GE; составится четырегранникъ $CFGE$, равномѣрный третьему четыреграннику $ACFE$; потому что у обоихъ общее основани FCE, а вершины G и A находятся на линіи параллельной плоскости основаній. Теперь остается доказать, что площадь FGE средняя пропорціональная между основаніями данной усѣченной пирамиды.

Отложимъ $FI = CB$ и проведемъ GI, составится треугольникъ FGI, равный ABC. Но въ треугольникахъ FGI и FGE основанія FI и FE лежатъ на прямой линіи, и у нихъ общая высота; поэтому они пропорціональны своимъ основаніямъ, т. е.

$$FGI \text{ или } ABC : FGE = FI \text{ или } BC : FE.$$

Изъ такого же сравненія треугольниковъ FGE и FDE,

$$FGE : FDE = FG \text{ или } AC : FD.$$

Но въ подобныхъ треугольникахъ ABC и FDE стороны пропорціональны

$$BC : FE = AC : FD;$$

поэтому, въ предъидущихъ двухъ пропорціяхъ вторыя отношенія равны; слѣдовательно и первыя тоже равны

$$ABC : FGE = FGE : FDE.$$

Значитъ, площадь треугольника FGE средняя пропорціональная между обоими основаніями усѣченной пирамиды *).

*) Доказательство это находится въ моемъ переводѣ геометріи Сиррода, 1847 г.

Другое доказательство. Пусть A^2 и a^2 означаютъ квадраты, равномѣрные основаніямъ усѣченной пирамиды; H и h высоты тѣхъ пирамидъ, которыхъ разность составляетъ усѣченную пирамиду; V и v объемы этихъ двухъ пирамидъ; а k высота усѣченной, т. е. $k=H-h$.

$$V=\tfrac{1}{3}A^2H,\quad v=\tfrac{1}{3}a^2h;\ \text{отсюда}\ V-v=\tfrac{1}{3}(A^2H-a^2h).$$

$$A^2:a^2=H^2:h^2\ (\S\ 479),\ \text{поэтому}\ A:a=H:h;$$

отсюда $$\frac{A-a}{H-h}=\frac{A}{H},\ \text{слѣд.}\ H=\frac{Ak}{A-a};$$

также $$\frac{A-a}{H-h}=\frac{a}{h},\ \text{слѣд.}\ h=\frac{ak}{A-a}.$$

$$V-v=\frac{k}{3}\cdot\frac{A^3-a^3}{A-a};\ \text{отсюда}\ V-v=\frac{k}{3}(A^2+Aa+a^2),$$

или $$V-v=A^2\cdot\frac{k}{3}+a^2\cdot\frac{k}{3}+Aa\cdot\frac{k}{3}.$$

Этотъ выводъ доказываетъ предложеніе, потому что Aa есть средняя пропорціональная величина между A^2 и a^2.

§ 511. Выведемъ отношеніе между объемами V и v двухъ пирамидъ. Пусть Q и q означаютъ ихъ основанія, H и h—высоты.

Извѣстно, что $V=\frac{1}{3}QH$, $v=\frac{1}{3}qh$; раздѣливъ одно равенство на другое, получимъ $V:v=QH:qh$, т. е. *объемы двухъ пирамидъ пропорціональны произведеніямъ площадей ихъ основаній на высоты.*

Положимъ, $Q=q$; получимъ $V:v=H:h$, т. е. *объемы двухъ пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

А положивъ $H=h$, получимъ $V:v=Q:q$, т. е. *объемы двухъ пирамидъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны площадямъ основаній.*

Если одновременно $Q=q$ и $H=h$, то $V=v$, т. е. *объемы пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны.*

Предложеніе.

§ 512. *Объемы подобныхъ пирамидъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ.*

Возьмемъ двѣ подобныя пирамиды; пусть V и v означаютъ ихъ объемы, Q и q — ихъ основанія, H и h — высоты, A и a сходственныя ихъ ребра. Высоты подобныхъ пирамидъ H и h пропорціональны ребрамъ A и a (§ 475), а площади Q и q — квадратамъ этихъ реберъ, т. е.

$$\frac{H}{h}=\frac{A}{a} \text{ и } \frac{Q}{q}=\frac{A^2}{a^2}.$$

Вслѣдствіе этихъ равенствъ, отношеніе (§ 511)

$$\frac{V}{v}=\frac{Q}{q}\cdot\frac{H}{h} \text{ обратится въ } \frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3}.$$

---

4. Показать возможность вычисленія объема какого ни есть многогранника; объемы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ. Понятія о правильныхъ многогранникахъ съ исходящими углами.

§ 513. Мы показали способы для измѣренія объемовъ призмъ и пирамидъ. Чтобы найти объемъ какого нибудь многогранника, разбиваютъ его на пирамиды проведеніемъ плоскостей изъ вершины многогранника или изъ какой нибудь точки, взятой внутри его, и вычисляютъ объемъ каждой пирамиды; сумма этихъ объемовъ составитъ объемъ даннаго многогранника.

Предложеніе.

§ 514. *Объемы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ реберъ.*

Мы видѣли, что объемы подобныхъ призмъ и пирамидъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ ихъ реберъ: это — общее свойство всѣхъ подобныхъ многогранниковъ.

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ подобныхъ многогранниковъ, A и a — сходственныя ребра.

Извѣстно, что подобные многогранники можно разбить на подобныя и одинаково расположенныя пирамиды; пусть T и t, T' и t', T'' и t'' и т. д. означаютъ объемы этихъ подобныхъ пирамидъ.

Такъ какъ ребра подобныхъ многогранниковъ пропорціональны между собою, то

$$T:t=A^3:a^3,\quad T':t'=A^3:a^3,\quad T'':t''=A^3:a^3, \text{ и т. д.};$$

отсюда $$\frac{T}{t} = \frac{T'}{t'} = \frac{T''}{t''} = \dots = \frac{A^3}{a^3};$$

слѣд. $$\frac{T + T' + T'' + \dots}{t + t' + t'' + \dots} = \frac{T}{t} \text{ и } \frac{V}{v} = \frac{A^3}{a^3}.$$

§ 515. *Правильнымъ многогранникомъ называется такой многогранникъ, въ которомъ всѣ грани равные и правильные многоугольники, притомъ всѣ двугранные углы равны между собою.* Напримѣръ, въ кубѣ грани — равные между собою квадраты; двугранные углы, какъ прямые, также равны между собою; слѣдовательно кубъ — правильный шестигранникъ.

Предложеніе.

§ 516. *Правильные многогранники могутъ быть только пяти видовъ.*

1) Вообразимъ, что грани правильнаго многогранника суть правильные треугольники. Каждый уголъ этого треугольника равенъ $\frac{2}{3}$, принимая прямой уголъ за единицу. Сумма плоскихъ угловъ около вершины многограннаго угла всегда меньше 4-хъ прямыхъ; поэтому углы правильнаго многогранника, котораго грани правильные треугольники, могутъ быть

трегранные, ибо $\frac{2}{3} \times 3 < 4$,

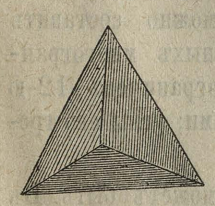
четырегранные, ибо $\frac{2}{3} \times 4 < 4$,

пятигранные, ибо $\frac{2}{3} \times 5 < 4$.

Нельзя допустить существованіе шестигранныхъ, семигранныхъ и т. д. угловъ, ибо $\frac{2}{3} \times 6 = 4$, а $\frac{2}{3} \times 7$, $\frac{2}{3} \times 8$ и т. д. больше 4-хъ прямыхъ.

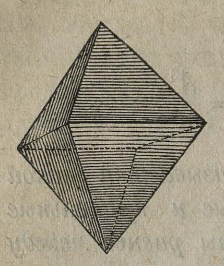
Итакъ, правильные многогранники, которыхъ грани правильные треугольники, могутъ быть не болѣе трехъ видовъ:

Фиг. 287-я.



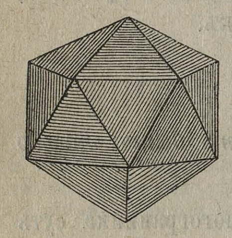
Правильный тетраэдръ, — онъ ограниченъ четырьмя правильными треугольниками, и углы его трегранные.

Фиг. 288-я.



Октаэдръ — ограниченъ осьмью правильными треугольниками, и углы его четырегранные.

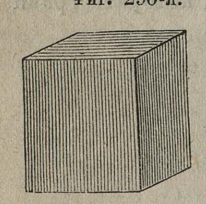
Фиг. 289-я.



Икосаэдръ — ограниченъ двадцатью правильными треугольниками, и углы его пятигранные.

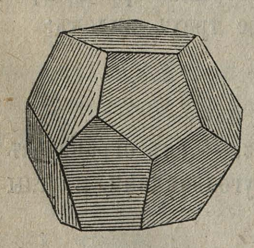
2) Пусть грани правильнаго многогранника квадраты; углы такихъ многогранниковъ могутъ быть только трегранные; и дѣйствительно, сумма трехъ плоскихъ угловъ около вершины многогранника меньше четырехъ прямыхъ; а четырегранные, пятигранные и т. д. углы невозможны, потому что сумма плоскихъ ихъ угловъ при вершинѣ не будетъ меньше 4 прямыхъ. И такъ, изъ квадратовъ возможно составить только одинъ видъ правильныхъ многогранниковъ, именно *кубъ* или *эксаэдръ*.

Фиг. 290-я.



3) Положимъ, что грани правильнаго многогранника правильные пятиугольники. Уголъ этого многоугольника равенъ $\frac{2}{5} \times 3$ или $\frac{6}{5}$ прямаго. Углы такихъ многогранниковъ могутъ быть только трегранные; ибо $\frac{6}{5} \times 3 < 4$, а $\frac{6}{5} \times 4$, $\frac{6}{5} \times 5$ и т. д. больше 4-хъ. И такъ, изъ правильныхъ пятиугольниковъ возможно составить только одинъ видъ правильныхъ многогранниковъ, *додекаэдръ*; онъ ограниченъ 12-ю правильными пятиугольниками; углы его трегранные.

Фиг. 291-я.



Другихъ правильныхъ многогранниковъ не можетъ быть. Въ

самомъ дѣлѣ, уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $\frac{2}{6} \times 4$ или $\frac{4}{3}$ прямаго; а $\frac{4}{3} \times 3 = 4$; слѣдовательно, уголъ трегранный невозможенъ, и подавно невозможенъ уголъ четырегранный, пятигранный и т. д.

Изъ правильныхъ 7-ми-угольниковъ, 8-ми-угольниковъ и т. д. невозможно составить правильныхъ многогранниковъ, потому, что углы ихъ больше угловъ правильнаго шестиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, если n означаетъ число угловъ правильнаго многоугольника, то

$$2\left(\frac{n-2}{n}\right) \text{ прямыхъ или } \left(2-\frac{4}{n}\right) \text{ прямыхъ}$$

будетъ выражать величину каждаго угла; и какъ, съ увеличеніемъ числа угловъ n, величина угла $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ увеличивается, а уголъ правильнаго шестиугольника равенъ $\frac{4}{3}$, то уголъ всякаго правильнаго многоугольника, котораго число боковъ больше шести, будетъ больше $\frac{4}{3}$.

ОТДѢЛЪ ДЕВЯТЫЙ.

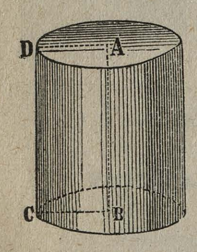
О круглыхъ тѣлахъ.

5. Прямой цилиндръ. — Сѣченіе цилиндра плоскостями, перпендикулярными и параллельными къ оси. — Конусъ. — Сѣченіе конуса плоскостью, перпендикулярною къ его оси, и плоскостью, проходящею черезъ ось. — Шаръ. — Сѣченіе шара. — Касательная плоскость.

§ 517. *Прямой цилиндръ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольника около одной изъ его сторонъ, принимаемой за неподвижную.*

Вообразимъ, что прямоугольникъ $ABCD$ обращается около стороны AB, которая остается неподвижною; стороны BC и AD, при этомъ движеніи, будучи перпендикулярны къ прямой AB, въ точкахъ B и A, должны лежать въ одной плоскости (§ 378) и опишутъ круги. Круги эти называются *основаніями* цилиндра. Прямая CD называется *производящею*, — она описываетъ *цилиндрическую* или *боковую поверхность* цилиндра. Неподвижная прямая AB называется *осью* цилиндра. Прямоугольникъ $ABCD$ называется *производящимъ прямоугольникомъ*. *Высота* цилиндра опредѣляется разстояніемъ между его основаніями; слѣдовательно высота прямаго цилиндра равна его оси или производящей.

Фиг. 292-я.



§ 518. *Сѣченіе цилиндра плоскостью, параллельною оси, есть прямоугольникъ.*

Пусть плоскость $IFGK$ параллельна оси AB, и слѣдовательно перпендикулярна къ основанію (§ 431); сѣченія ея съ основаніями будутъ прямыя IF и KG; докажемъ, что сѣченія ея съ цилиндрическою поверхностью также прямыя. Вообразимъ,

что производящій прямоугольникъ $ABCD$ обращается около оси AB: когда точка D производящей DC придетъ въ точку F, то производящая DC, будучи перпендикулярна къ основанію, должна лежать въ плоскости $IFGK$; ибо плоскость $IFGK$ и основаніе цилиндра взаимно перпендикулярны (§ 428). И такъ, производящая DC, придя въ F, будетъ находиться въ одно время на цилиндрической поверхности и на плоскости $IFGK$, — значитъ, она принадлежитъ сѣченію этихъ поверхностей; слѣдовательно плоскость $IKGF$ и цилиндрическая поверхность пересѣкаются по прямымъ линіямъ FG и IK. Эти линіи, какъ производящія, перпендикулярны къ основанію, и слѣдовательно параллельны между собою; а какъ IF и GK также параллельны между собою (§ 404), значитъ, четвероугольникъ $IFGK$ — параллелограммъ; онъ прямоугольникъ, потому что FG, будучи перпендикулярна къ плоскости основанія ADF, перпендикулярна и къ прямой FI, проведенной по ней черезъ основаніе перпендикуляра.

Фиг. 293-я.

§ 519. Слѣдствіе. *Сѣченіе цилиндра, проходящее черезъ ось, есть прямоугольникъ, равный удвоенному производящему прямоугольнику.*

Предложеніе.

§ 520. *Сѣченіе цилиндра плоскостью, перпендикулярною къ оси, есть кругъ равный основанію.*

Пусть плоскость EPR перпендикулярна къ оси AB, слѣд. параллельна основанію (§ 402), пусть O означаетъ пересѣченіе этой плоскости съ осью; докажемъ, что сѣченіе EPR есть кругъ, котораго центръ въ O.

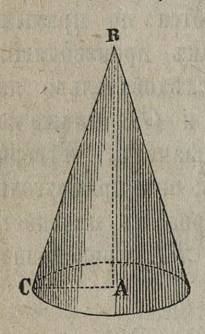
Возьмемъ на пересѣченіи плоскости EPR съ цилиндрическою поверхностью какія нибудь двѣ точки E и P, и проведемъ плоскости черезъ ось AB и точку P, также черезъ AB и точку E; получимъ параллельныя сѣченія OP и AF (§ 404); FP и AO также параллельны, на основаніи предъидущаго предложенія; поэтому $OP = AF$. Точно также докажется, что $OE = AD$; а такъ какъ AF и AD равны, какъ радіусы основанія, то $OE = OP$. Точки E и P взяты произвольно на сѣченіи; поэтому всѣ точки пересѣченія плоскости EPR съ цилиндрическою поверхностью находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ точки O; слѣд. это

сѣченіе есть окружность, которой центръ въ O. Кромѣ того, радіусъ OP равенъ радіусу основанія AF; стало быть окружности и круги, описанные ими, также равны.

§ 521. *Прямой конусъ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольнаго треугольника около одного изъ его катетовъ, принимаемаго за неподвижный.*

Вообразимъ, что прямоугольный треугольникъ ABC обращается около катета AB, который остается неподвижнымъ; другой катетъ AC опишетъ кругъ, котораго центръ въ A, — этотъ кругъ называется *основаніемъ* конуса; ипотенуза BC опишетъ *коническую поверхность* или *боковую* поверхность конуса; точка B называется *вершиною конуса*; разстояніе между основаніемъ и вершиною называется *высотою* конуса, — она совпадаетъ съ неподвижнымъ катетомъ, который называется *осью* конуса. Треугольникъ ABC называется *производящимъ треугольникомъ*.

Фиг. 294-я.

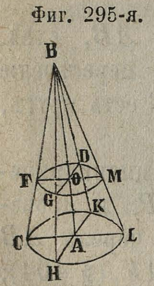


Предложеніе.

§ 522. *Сѣченіе конуса плоскостью, перпендикулярною къ оси, есть кругъ.*

Пусть плоскость FGD перпендикулярна къ оси, O — точка пересѣченія ея съ осью AB; докажемъ, что FGD — кругъ, котораго центръ въ O. Возьмемъ по произволу двѣ точки F и G на сѣченіи FGD и проведемъ черезъ каждую и вершину B прямыя, онѣ встрѣтятъ окружность основанія въ точкахъ C и H, и будутъ производящими конуса. Проведя плоскости черезъ AB и BH, AB и BC, получимъ параллельныя сѣченія AH и OG, AC и OF. Поэтому изъ треугольниковъ ABH и ABC, имѣемъ

Фиг. 295-я.



$$AH : OG = AB : OB,\quad AC : OF = AB : OB;$$

отсюда

$$AH : OG = AC : OF.$$

Предъидущіе члены AH и AC этой пропорціи, какъ радіусы основанія, равны между собою; слѣд. и послѣдующіе члены равны

$$OG = OF.$$

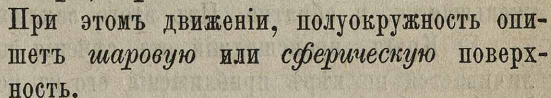
И такъ, двѣ точки G и F сѣченія FGD равно отстоятъ отъ точки O; такъ же объяснимъ, что и всѣ точки сѣченія имѣютъ то же самое свойство; потому что точки G и F взяты по произволу на сѣченіи; слѣдовательно это сѣченіе есть кругъ.

Предложеніе.

§ 523. *Сѣченіе конуса плоскостью, проходящею черезъ ось, есть равнобедренный треугольникъ.*

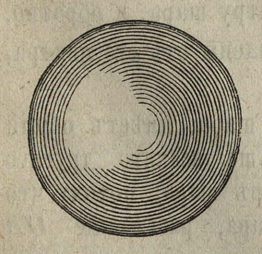
Пусть сѣченіе BHK проходитъ черезъ ось AB; сѣченіе его съ основаніемъ будетъ прямая HK; надобно доказать, что пересѣченія съ коническою поверхностью будутъ прямыя. Точки B и H принадлежатъ обѣимъ поверхностямъ; слѣд. производящая BH также принадлежитъ имъ; значитъ, пересѣченіе сѣкущей плоскости съ коническою поверхностью будетъ производящая BH. Такимъ же образомъ объяснится, что производящая BK составляетъ пересѣченіе тѣхъ же поверхностей; значитъ, BHK есть треугольникъ, въ которомъ бока BH и BK равны, какъ наклонныя, равно-удаленныя отъ основанія перпендикуляра AB къ плоскости основанія. И такъ, сѣченіе BHK есть равнобедренный треугольникъ. Онъ равенъ удвоенному производящему треугольнику ABC; въ самомъ дѣлѣ; треугольникъ ABH, составляющій половину треугольника BHK, равенъ треугольнику ABC (§ 98), составляющему половину треугольника BCL.

§ 524. *Шаръ есть тѣло, образуемое обращеніемъ полукруга около его діаметра, принимаемаго за неподвижный.*



При этомъ движеніи, полуокружность опишетъ *шаровую* или *сферическую* поверхность.

Фиг. 296-я.



Очевидно, что всѣ точки шаровой поверхности находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра производящей полуокружности; на этомъ основаніи говорятъ: *шаръ есть тѣло, ограниченное поверхностью, которой всѣ точки равно-удалены отъ одной точки, называемой центромъ шара.*

Всякая прямая, соединяющая центръ шара съ какою нибудь точкою его поверхности, называется *радіусомъ* шара. Прямая, проходящая черезъ центръ шара и ограниченная его поверхностью, называется *діаметромъ* шара.

Предложение.

§ 525. *Сѣченіе шара плоскостью есть кругъ.*

Изъ центра шара O опустимъ перпендикуляръ OA на сѣкущую плоскость BCD; докажемъ, что сѣченіе BCD есть кругъ, котораго центръ — въ основаніи A перпендикуляра къ сѣченію.

Произвольныя точки B и C линіи сѣченія BDC соединимъ съ точкою A, и проведемъ радіусы шара OB и OC. Радіусы эти суть наклонныя къ плоскости сѣченія, и какъ они равны между собою, то основанія B и C наклонныхъ равно-удалены отъ основанія A перпендикуляра OA; поэтому $AB = AC$. И такъ, точки B и C равно-отстоятъ отъ точки A; а какъ эти точки взяты произвольно на сѣченіи шаровой поверхности съ сѣкущею плоскостью BCD; значитъ, эта линія есть окружность, а самое сѣченіе — кругъ.

Фиг. 297-я.

§ 526. Слѣдствіе. Изъ прямоугольнаго треугольника ABO имѣемъ

$$\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2;$$

значитъ, сумма квадратовъ линій AB и AO — постоянная, именно она равна квадрату радіуса шара; отсюда слѣдуетъ, что съ увеличеніемъ одной изъ двухъ линій, AB или AO, другая уменьшается, и обратно. Изъ этого заключаемъ:

1) Кругъ, происшедшій отъ сѣченія шара плоскостью, увеличивается по мѣрѣ приближенія его къ центру шара, и обратно.

2) Равные круги сѣченій шара равно-удалены отъ его центра, и обратно.

3) Сѣченіе, проходящее черезъ центръ шара, имѣетъ общій центръ и радіусъ съ шаромъ, и оно больше всякаго другаго сѣченія, которое не проходитъ черезъ центръ шара; потому что для сѣченія, проходящаго черезъ центръ шара, разстояніе OA равно нулю.

§ 527. Основываясь на предъидущемъ замѣчаніи, подраздѣляютъ круги на *большіе* и *малые*. Кругъ, проходящій черезъ центръ шара, называется *большимъ кругомъ*; а тотъ, который не проходитъ черезъ центръ шара, называется *малымъ кругомъ*.

Изъ опредѣленія большихъ круговъ слѣдуетъ:

1) *Всѣ большіе круги одного шара равны между собою;* потому что радіусы этихъ круговъ равны радіусу шара.

2) *Большіе круги взаимно-дѣлятся пополамъ;* потому что ихъ пересѣченіе проходитъ черезъ центръ шара и, слѣдовательно, составляетъ діаметръ, общій обоимъ кругамъ.

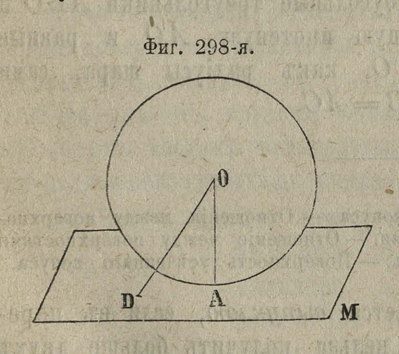
3) *Шаръ и его поверхность большимъ кругомъ раздѣляются пополамъ.* Дѣйствительно, вмѣстивъ одну изъ двухъ частей дѣленія шара въ другую и совмѣстивъ большой кругъ этой части съ большимъ кругомъ другой, найдемъ, что поверхности этихъ частей совмѣстятся; въ противномъ случаѣ, точки шаровой поверхности не были бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара.

Предложеніе.

§ 528. *Плоскость, перпендикулярная къ радіусу шара въ его конць, имѣетъ одну только эту точку, общую съ шаровой поверхностью.*

Пусть OA означаетъ радіусъ шара; черезъ его конецъ A проведемъ плоскость M перпендикулярно къ AO. Произвольную точку D плоскости M соединимъ съ центромъ O, — получимъ наклонную OD къ плоскости; поэтому OD больше перпендикуляра OA; а какъ OA есть радіусъ шара, то точка D лежитъ внѣ шара. Сказанное о точкѣ D относится ко всѣмъ точкамъ плоскости M, кромѣ точки A; значитъ, плоскость эта дѣйствительно имѣетъ одну только общую точку съ шаровою поверхностью.

Фиг. 298-я.



Плоскость, имѣющая одну только общую точку съ шаровою поверхностью, называется *касательною* плоскостью къ шару; а общая ихъ точка — точкою *касанія.* Поэтому *плоскость перпендикулярная къ радіусу шара въ его конць, касательная къ шару.*

Предложеніе (обратное).

§ 529. *Касательная плоскость къ шару перпендикулярна къ прямой, соединяющей точку касанія съ центромъ шара.*

Въ самомъ дѣлѣ, прямая, соединяющая точку касанія съ центромъ шара, какъ радіусъ его, короче всякой прямой, соединяющей какую нибудь точку касательной плоскости съ центромъ шара; слѣдовательно и проч.

§ 530. *Прямая, имѣющая одну только общую точку съ шаровой поверхностью, называется касательною линіею къ шару.*

Предложеніе.

§ 531. *Касательныя линіи къ шару, проведенныя изъ одной точки внѣ шара, равны между собою.*

Пусть AB и AC означаются касательныя линіи къ шару O, точки B и C — точки касанія; надо доказать, что $AB = AC$. Черезъ касательную AB и центръ O шара проведемъ плоскость, въ сѣченіи получимъ большой кругъ PBO, къ которому AB будетъ касательная (§ 152) въ точкѣ B; слѣд. $BO \perp AB$. Точно также проведемъ плоскость черезъ касательную AC и центръ O, получимъ большой кругъ PCO и $CO \perp AC$. Прямоугольные треугольники ABO и ACO, имѣя общую ипотенузу AO и равные катеты $BO = CO$, какъ радіусы шара, сами равны; слѣд. $AB = AC$.

Фиг. 299-я.

---

6. Поверхности и объемы цилиндра и конуса. — Отношенія между поверхностями цилиндровъ и между ихъ объемами. — Отношеніе между поверхностями конусовъ и между объемами этихъ тѣлъ. — Поверхность усѣченнаго конуса.

§ 532. Поверхность называется *выпуклою*, если въ пересѣченія ея съ прямою линіею нельзя получить больше двухъ общихъ точекъ. Поэтому поверхности цилиндра, конуса, шара, призмы и пирамиды суть выпуклыя поверхности.

§ 533. Аксіома. *Всякая плоская фигура меньше выпуклой поверхности, имѣющей съ ней общій обводъ.*

Предложеніе.

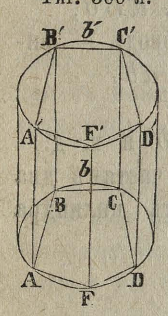
§ 534. *Всякая выпуклая поверхность меньше объемлющей ее выпуклой же поверхности, если обѣ имѣютъ общій обводъ.*

Доказательство имѣетъ совершенно такой же характеръ, какой мы употребили при доказательствѣ выпуклыхъ линій (§ 341).

Предложенiе.

§ 535. *Полная поверхность цилиндра больше полной поверхности всякой вписанной въ ней призмы и меньше полной поверхности описанной призмы около цилиндра.*

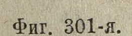
Фиг. 300-я.

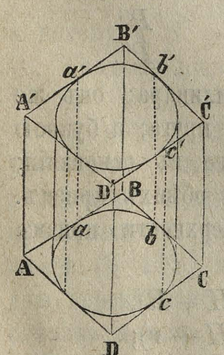


1) Чтобы вписать призму въ цилиндрѣ, впишемъ многоугольникъ $ABCDF$ въ одномъ изъ основаній цилиндра и изъ вершинъ этого многоугольника возставимъ перпендикуляры къ его плоскости; перпендикуляры эти будутъ производящими и пересѣкутъ окружность другого основанія въ точкахъ A', B', C'..; проведя прямыя $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$,..., получимъ прямую призму (§ 452), вписанную въ цилиндрѣ.

На основаніи предъидущей аксіомы (§ 533), каждая изъ боковыхъ граней призмы, напримѣръ $BCC'B'$, меньше соотвѣтствующей части цилиндрической поверхности $BbCC'B'b'$ вмѣстѣ съ двумя круговыми сегментами $BbCB$ и $B'b'C'B'$. Поэтому боковая поверхность вписанной призмы меньше боковой поверхности цилиндра, сложенной съ суммою сегментовъ обоихъ основаній, отсѣченныхъ отъ круговъ боками многоугольниковъ; а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства оба основанія призмы, найдемъ, что полная поверхность цилиндра больше полной поверхности призмы.

2) Чтобы описать призму около цилиндра, опишемъ многоугольникъ $ABCD$ около одного изъ основаній цилиндра; а изъ точекъ касанія a, b, c,... возставимъ перпендикуляры aa', bb'... къ основанію до пересѣченія съ другимъ основаніемъ; наконецъ, черезъ каждыя двѣ пересѣкающіяся прямыя AB и aa', BC и bb' и т. д., проведемъ плоскости до пересѣченія съ плоскостью верхняго основанія; такъ получимъ прямую призму $ABCDA'B'C'D'$, описанную около цилиндра. Дѣйствительно, плоскость основанія цилиндра перпендикулярна къ пересѣкающимся плоскостямъ AB', DA',... (§ 426); слѣд. она перпендикулярна и къ ихъ сѣченіямъ AA', BB',... (§ 429); по-


Фиг. 301-я.



этому ребра AA', BB',... параллельны между собою (§ 391) и ограничены параллельными плоскостями AC и $A'C'$.

Такъ какъ всякая выпуклая поверхность меньше объемлющей поверхности, если у нихъ общій обводъ (§ 533), то, разсматривая части цилиндрической поверхности, заключающейся между производящими aa' и bb', bb' и cc' и т. д., найдемъ, что выпуклая поверхность

$a'abb' < aa'BB' + BB'b'b +$ площ. $aBb +$ площ. $a'B'b'$;

ибо обѣ части этого неравенства имѣютъ общій обводъ — фигуру, ограниченную прямыми aa', bb' и дугами ab, $a'b'$.

Также выпуклая поверхность

$bcc'b' < CC'b'b + CC'c'c +$ площ. $bCc +$ площ. $c'Cb'$ и т. д.

Сложивъ эти неравенства и придавъ къ обѣимъ частямъ два круга основаній, найдемъ, что полная поверхность цилиндра меньше полной поверхности описанной призмы.

Предложеніе.

§ 536. *Можно въ цилиндръ вписать и описать около него призмы одинаковаго числа граней, которыхъ разность полныхъ поверхностей будетъ меньше всякой данной величины.*

Въ одномъ какомъ нибудь основаніи цилиндра впишемъ и опишемъ около него правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ; по этимъ многоугольникамъ построимъ вписанную и описанную прямыя призмы (§ 535). Примемъ слѣдующія означенія:

	Боковыя поверхн.	Площ. основаній.	Окружность и периметры осн.
цилиндра:	S,	Q,	C;
вписанной призмы:	S',	Q',	P';
описанной призмы:	S'',	Q'',	P''.

Буквою R назовемъ радіусъ основанія цилиндра; онъ же есть апоѳема многоугольника, описаннаго около круга; а буквою r означимъ апоѳему многоугольника, вписаннаго въ основаніи; H—пусть означаетъ общую высоту цилиндра и обѣихъ призмъ.

На основаніи §§ 458 и 296, полныя поверхности призмъ описанной и вписанной выразятся такъ:

$$S'' + 2Q'' = P''H + 2\cdot P''\cdot \tfrac{1}{2}R = P''(H+R),$$
$$S' + 2Q' = P'H + 2\cdot P'\cdot \tfrac{1}{2}r = P'(H+r);$$

отсюда $(S''+2Q'') - (S'+2Q') = (P''-P')H + P''R - P'r$.

Удваивая число боковъ основанiй призмъ, получимъ такiя призмы, что разность $P'' - P'$ периметровъ основанiй, а также разность апоѳемъ $R - r$ будетъ меньше всякаго даннаго количества (§§ 344, 345). Поэтому въ произведенiи $(P'' - P')H$ множитель $P'' - P'$ есть безконечно-малое; другой множитель H— постоянное; слѣд. произведенiе $(P'' - P')H$ — безконечно-малое. Разность $P''R - P'r$ также безконечно малая (§ 333), потому что $P'' - P'$ и $R - r$ — безконечно-малыя количества. Поэтому сумма $(P'' - P')H + (P''R - P'r)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разность между полными поверхностями описанной и вписанной призмъ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества (§ 330), если число боковыхъ граней призмъ постепенно удваивать.

§ 537. Слѣдствiе I. *Всегда можно въ цилиндрѣ вписать или описать около него такую призму, которой боковая поверхность будетъ разниться отъ боковой поверхности цилиндра на безконечно малое количество.*

Оставивъ означенiя предъидущаго §, на основанiи § 535, полная поверхность цилиндра заключается между полными поверхностями описанной и вписанной призмъ; поэтому

$$S'' + 2Q'' > S + 2Q > S' + 2Q';$$

слѣд. $(S'' + 2Q'') - (S + 2Q) < (S'' + 2Q'') - (S' + 2Q')$; поэтому первая часть этого неравенства можетъ быть сдѣлана меньше всякаго даннаго количества (§ 546); но эту первую часть можно представить такъ: $(S'' - S) + 2(Q'' - Q)$, гдѣ $Q'' - Q$ положительное количество; слѣд.

$$S'' - S < (S'' - S) + 2(Q'' - Q);$$

а потому и $S'' - S$ есть безконечно-малое количество.

Такъ же докажется, что и $S - S'$ есть безконечно-малое.

§ 538. Слѣдствiе II. Боковая поверхность цилиндра, при удваиванiи числа граней вписанной и описанной призмъ, есть постоянная величина, къ которой боковыя поверхности призмъ приближаются, по величинѣ, первая увеличиваясь, а вторая уменьшаясь (§ 458), такъ что разность между этою постоянною и каждою перемѣнною, какъ мы уже доказали (§ 547), можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины; поэтому *боковая поверхность цилиндра есть предѣлъ, какъ для боковой поверх-*

ности вписанной, такъ и описанной призмъ, если увеличивать по произволу число граней призмъ.

Предложеніе.

§ 539. *Боковая поверхность цилиндра измѣряется произведеніемъ окружности основанія на производящую.*

Пусть S, C и H означаютъ послѣдовательно боковую поверхность цилиндра, окружность основанія и производящую, она же и высота цилиндра; надо доказать, что $S = C \times H$.

Около цилиндра опишемъ призму; пусть S'' и P'' означаютъ боковую поверхность призмы и периметръ ея основанія. Положимъ, что число граней описанной призмы постепенно удваивается; вслѣдствіе этого, на основаніи § 537, назвавъ буквою α—безконечно-малое количество, получимъ

$$S'' - S = \alpha; \text{ отсюда } S'' = S + \alpha \ldots\ldots (1).$$

Но $S'' = P''H$ (§ 458) и $P'' = C + \beta$, гдѣ β—безконечно-малое (§ 344); слѣд.

$$S'' = (C + \beta)H = CH + C\beta \ldots\ldots (2).$$

Изъ (1) и (2) равенствъ, имѣемъ

$$S + \alpha = CH + C\beta,$$

гдѣ $C\beta$ есть безконечно-малое; поэтому, на основаніи § 335,

$$S = CH.$$

§ 540. Слѣдствіе I. Чтобы найти полную поверхность цилиндра, надо къ боковой его поверхности придать удвоенную площадь основанія. Впрочемъ, полную поверхность цилиндра можно найти независимо отъ боковой, потому что, на основаніи § 546, полная поверхность цилиндра есть предѣлъ полныхъ поверхностей вписанной и описанной призмъ.

§ 541. Слѣдствіе II. Пусть S и s означаютъ боковыя поверхности цилиндровъ, R и r — радіусы ихъ основаній, H и h — высоты или производящія.

На основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$S = 2\pi RH \text{ и } s = 2\pi rh; \text{ отсюда } S : s = RH : rh.$$

Поэтому, *боковыя поверхности цилиндровъ пропорціональны площадямъ прямоугольниковъ производящихъ цилиндры.*

Если $R = r$, то предъидущая пропорція обратится въ $S : s = H : h$, т. е. *боковыя поверхности цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

Положивъ $H = h$, получимъ $S : s = R : r$, т. е. *боковыя поверхности цилиндровъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны радіусамъ основаній.*

Если положить одновременно $R = r$ и $H = h$, то $S = s$, т. е. *когда въ сравниваемыхъ цилиндрахъ радіусы основаній и высоты равны, то и боковыя поверхности также равны.*

Предложеніе.

§ 542. *Можно въ цилиндръ вписать и описать около него призмы одинаковаго числа граней, которыхъ разность объемовъ будетъ меньше всякаго даннаго количества.*

Въ данномъ цилиндрѣ впишемъ и опишемъ около него прямыя призмы, которыхъ основанія были бы правильные многоугольники, одинаковаго числа боковъ, одинъ вписанный, а другой описанный около круга основанія цилиндра. Для краткости примемъ слѣдующія означенія:

	Объемы.	Площади основаній.	Высоты.
цилиндра:	V,	Q,	H,
вписанной призмы:	V',	Q',	H,
описанной призмы:	V'',	Q'',	H.

Призмы прямыя, слѣд. объемъ каждой равенъ площади основанія, умноженной на высоту; поэтому

$$V'' = Q''H, \quad V' = Q'.H; \text{ отсюда } V'' - V' = (Q'' - Q')H.$$

Удваивая число сторонъ правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около круга, составляющаго основаніе цилиндра, можемъ получить такіе многоугольники, которыхъ разность площадей $Q'' - Q'$ будетъ меньше всякаго даннаго количества; поэтому въ произведеніи $(Q'' - Q')H$ множитель $Q'' - Q'$ есть безконечно-малое, а H — постоянное; слѣдовательно произведеніе, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разность $V'' - V'$, будетъ безконечно-малое (§ 332).

§ 543. Слѣдствіе. Очевидно, что объемъ цилиндра больше объема вписанной призмы и меньше объема описанной призмы; поэтому разность между объемами цилиндра и каждой призмы

будетъ меньше разности между объемами призмъ; но какъ всегда можно вписать и описать такія призмы, которыхъ разность объемовъ — безконечно-мала, то и подавно разности $V - V'$ и $V'' - V$ будутъ безконечно-малы. Отсюда слѣдуетъ, что *объемъ цилиндра есть предѣлъ, какъ для объемовъ вписанныхъ, такъ и описанныхъ призмъ, если произвольно удваивать число граней призмъ.*

Предложеніе.

§ 544. *Объемъ цилиндра измѣряется произведеніемъ площади его основанія на высоту.*

Около цилиндра опишемъ призму; оставивъ означенія объемовъ, площадей основаній и высотъ тѣ же, что въ § 542, получимъ
$$V'' = Q'' \times H.$$
Удваивая число боковыхъ граней описанной призмы, найдемъ, на основаніи предъидущаго §, что $V'' - V = \alpha$, $Q'' - Q = \beta$, гдѣ α и β безконечно-малыя; слѣд. $V'' = V + \alpha$ и $Q'' = Q + \beta$; вставивъ эти выраженія въ предъидущее равенство, получимъ
$$V + \alpha = (Q + \beta)H \text{ или } V + \alpha = QH + \beta H;$$
отсюда (§ 335)
$$V = Q \times H.$$

§ 545. Слѣдствіе. Пусть V и v означаютъ объемы двухъ цилиндровъ, R и r — радіусы ихъ основаній, H и h — высоты, онѣ же производящія.

На основаніи предъидущаго предложенія, получимъ
$$V = \pi R^2 \times H,\ v = \pi r^2 \times h; \text{ отсюда } V : v = \pi R^2 H : \pi r^2 h,$$
т. е. *объемы цилиндровъ пропорціональны произведеніямъ площадей ихъ основаній на высоты.*

Если положить въ предъидущей пропорціи $R = r$, то $V : v = H : h$, т. е. *объемы цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

Положивъ въ той же пропорціи $H = h$, получимъ $V : v = \pi R^2 : \pi r^2$ или $V : v = R^2 : r^2$, т. е. *объемы цилиндровъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны квадратамъ радіусовъ основаній.*

Если въ той же пропорціи одновременно $R = r$, $H = h$, то $V = v$, т. е. *объемы цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія и равныя высоты, равны между собою.*

§ 546. *Примѣчаніе.* Если окружность принять за периметръ правильнаго многоугольника, котораго бока безконечно-малыя линіи (§ 354), то цилиндръ можно принять за прямую призму, съ безконечнымъ числомъ граней, которой основаніе — правильный многоугольникъ съ безконечно-малыми боками, а боковыми ребрами будутъ производящія. Но боковая поверхность прямой призмы равна произведенію периметра основанія на ребро; выраженіе это не зависитъ отъ числа граней призмы; слѣд. боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности основанія на производящую.

Объемъ призмы равенъ произведенію ея площади основанія на высоту, и это выраженіе не зависитъ отъ числа граней призмы; слѣдовательно и объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

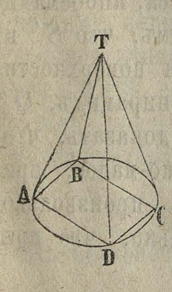
Настоящее примѣчаніе, не смотря на простоту выводовъ для измѣреній поверхностей и объемовъ цилиндра, не точно; ибо нельзя кривую линію — окружность принять за ломанную; но примѣчаніемъ этимъ можно пользоваться, какъ средствомъ для облегченія памяти: кто знаетъ, какъ измѣряются поверхности и объемы прямой призмы, тотчасъ припомнитъ выраженія, служащія мѣрою поверхности и объема прямаго цилиндра.

Предложеніе.

§ 547. *Полная поверхность конуса больше полной поверхности вписанной въ ней пирамиды и меньше полной поверхности описанной около нея пирамиды.*

1) Чтобы вписать пирамиду въ конусѣ, впишемъ многоугольникъ въ ея основаніи и черезъ бока AB, BC,... и вершину конуса T проведемъ плоскости; такъ получимъ вписанную пирамиду $TABCD$.

Фиг. 302-я.



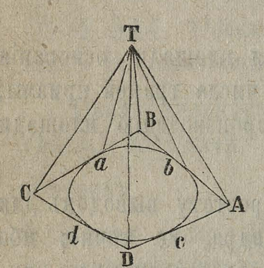
Треугольникъ ABT меньше соотвѣтствующей ему конической поверхности, сложенной съ круговымъ сегментовъ ABA (§ 533); то же скажемъ и о прочихъ треугольникахъ; слѣдовательно боковая поверхность пирамиды меньше боковой поверхности конуса, сложенной съ суммою сегментовъ, отрѣзанныхъ отъ круга основанія боками AB, BC,...; а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства площадь многоуголь-

ника $ABCD$, найдемъ, что полная поверхность вписанной пирамиды меньше полной поверхности конуса.

2) Чтобы описать пирамиду около конуса, опишемъ многоугольникъ около его основанія и проведемъ плоскости черезъ каждый бокъ этого многоугольника и вершину T; проведемъ еще производящія Ta, Tb,... въ точки касанія a, b,...

На основаніи предложенія (§ 534), часть выпуклой поверхности конуса abT меньше объемлющей ее $aBT + bBT +$ сегм. abB; то же скажемъ и о другихъ частяхъ конической поверхности bcT, cdT и daT; слѣд. боковая поверхность конуса меньше боковой поверхности пирамиды, увеличенной площадями, которыя заключаются между описаннымъ многоугольникомъ и кругомъ; а придавъ къ обѣимъ частямъ неравенства по кругу основанія, найдемъ, что полная поверхность конуса меньше полной поверхности описанной пирамиды.

Фиг. 303-я.

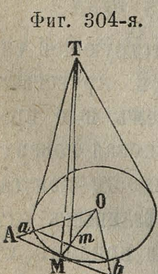


Предложеніе.

§ 548. *Можно въ конусъ вписать и описать около него правильныя пирамиды одинаковаго числа граней, которыхъ разность полныхъ поверхностей будетъ меньше всякаго даннаго количества.*

Впишемъ въ основаніи и опишемъ около него два правильные многоугольника одинаковаго числа боковъ; пусть P'' означаетъ периметръ описаннаго многоугольника и AB — одинъ изъ его боковъ, P' означаетъ периметръ вписаннаго многоугольника, и ab одинъ изъ его боковъ; OM и Om будутъ апоѳемы этихъ многоугольниковъ. Примемъ эти многоугольники за основанія правильныхъ пирамидъ, которыхъ вершины находятся въ вершинѣ T даннаго конуса; апоѳемами пирамидъ будутъ TM и Tm. Положимъ, что S'' и S' означаютъ соотвѣтственно боковыя поверхности описанной и вписанной правильныхъ пирамидъ, Q'' и Q' — площади ихъ основаній. Надо доказать, что $(S'' + Q'') - (S' + Q')$ есть безконечно-малое, при условіи, что число граней пирамидъ произвольно увеличивается. Замѣтимъ предварительно, что при

Фиг. 304-я.



этомъ условіи разности периметровъ $P'' - P'$ и разности апоѳемъ OM-Om суть безконечно-малыя (§§ 344, 345).

На основаніи §§ 460 и 296, имѣемъ

$$S'' + Q'' = \frac{1}{2} P'' \cdot TM + \frac{1}{2} P'' \cdot OM,$$

$$S' + Q' = \frac{1}{2} P' \cdot Tm + \frac{1}{2} P' \cdot Om; \text{ отсюда}$$

$$(S''+Q'')-(S'+Q')=(\tfrac{1}{2}P''\cdot TM-\tfrac{1}{2}P'\cdot Tm)+(\tfrac{1}{2}P''\cdot OM-\tfrac{1}{2}P'\cdot Om).$$

Слагаемое $\frac{1}{2} P'' \cdot TM - \frac{1}{2} P' \cdot Tm$ есть безконечно-малое (§ 333), потому что разности $P'' - P'$ и $TM - Tm$ безконечно-малыя; о первой разности мы ужѐ замѣтили выше, а $TM - Tm$, какъ разность двухъ сторонъ треугольника TMm, меньше третьей стороны Mm, которая есть безконечно-малое. Въ другомъ слагаемомъ имѣемъ также разности $P'' - P'$ и $OM - Om = Mm$ безконечно-малыя. И такъ, сумма этихъ слагаемыхъ можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины.

§ 549. Слѣдствіе I. *Всегда можно въ конусъ вписать и описать около него такую правильную пирамиду, которой боковая поверхность будетъ разниться отъ боковой поверхности конуса на безконечно-малое количество.*

Примемъ слѣдующія означенія:

	Боковыя поверхности.	Площади основаній.
конуса:	S,	Q,
вписанной пирамиды:	S',	Q',
описанной пирамиды:	S'',	Q''.

Полныя поверхности конуса, вписанной и описанной пирамидъ послѣдовательно равны $S + Q$, $S' + Q'$, $S'' + Q''$. На основаніи § 547, имѣемъ

$$S'' + Q'' > S + Q > S' + Q';$$

отсюда $(S'' + Q'') - (S + Q) < (S'' + Q'') - (S' + Q')$;

поэтому первую часть этого неравенства можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, ибо вторая часть, на основаніи предъидущаго §, есть безконечно-малое количество; но эту первую часть можно представить такъ: $(S'' - S) + (Q'' - Q)$, гдѣ $Q'' - Q$ положительное количество; а потому

$$S'' - S < (S'' - S) + (Q'' - Q), \text{ слѣд. } S'' - S$$

есть безконечно-малое.

Такъ же докажется, что и $S - S'$ — безконечно-малое.

§ 550. Слѣдствіе II. Боковая поверхность конуса, при удвоеніи числа граней вписанной и описанной правильныхъ пирамидъ, есть постоянная величина, къ которой боковыя поверхности пирамидъ приближаются, по величинѣ, первая увеличиваясь, а вторая уменьшаясь (§ 460) такъ, что разность между этою постоянною и каждою перемѣнною, какъ это уже доказано (§ 549), есть безконечно-малое; поэтому *боковая поверхность конуса есть предѣлъ, какъ для боковой поверхности вписанной, такъ и описанной правильныхъ пирамидъ, если увеличивать по произволу число граней пирамидъ.*

Предложеніе.

§ 551. *Боковая поверхность конуса измѣряется половиною произведенія окружности основанія на производящую.*

Пусть S, C и K означаютъ послѣдовательно боковую поверхность конуса, окружность основанія и производящую; надо доказать, что $S = \frac{1}{2} C \cdot K$.

Около конуса опишемъ правильную пирамиду; пусть S'' и P' означаютъ боковую поверхность пирамиды и периметръ ея основанія. Положимъ, что число граней пирамиды постепенно увеличивается; вслѣдствіе этого, на основаніи предъидущаго, § 549, назвавъ буквою α безконечно-малое, получимъ

$$S'' - S = \alpha; \text{ отсюда } S'' = S + \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Но $S'' = \frac{1}{2} P'K$ (§ 460) и $P' = C + \beta$, гдѣ β — безконечно-малое количество (§ 344); слѣд.

$$S'' = \tfrac{1}{2}(C + \beta)K = \tfrac{1}{2}CK + \tfrac{1}{2}K\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Изъ (1) и (2) равенствъ, имѣемъ

$$S + \alpha = \tfrac{1}{2}CK + \tfrac{1}{2}K\beta,$$

гдѣ $\frac{1}{2}K\beta$ — безконечно-малое: слѣд. $S = \frac{1}{2}CK$ (§ 335).

§ 552. Слѣдствіе I. Чтобы найти полную поверхность конуса, надо къ боковой его поверхности придать площадь основанія.

§ 553. Слѣдствіе II. Положимъ, что S и s означаютъ боковыя поверхности конусовъ, A и a — ихъ производящія, C и c — окружности, R и r — радіусы основаній.

На основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ

$$S = {}^1/_2 C \times A,\quad s = {}^1/_2 c \times a;\ \text{отсюда}\ S : s = CA : ca;$$

поэтому, *боковыя поверхности конусовъ пропорціональны произведеніямъ изъ окружностей ихъ основаній на производящія.*

Положивъ въ пропорціи $C = c$, получимъ $S : s = A : a$, т. е. *боковыя поверхности конусовъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны производящимъ,* потому что изъ равенства $C = c$, слѣдуетъ $R = r$ и $\pi R^2 = \pi r^2$.

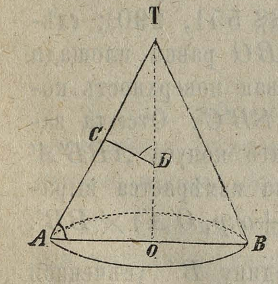
Положивъ въ той же пропорціи $A = a$, получимъ $S : s = C : c$, или $S : s = R : r$, т. е. *боковыя поверхности конусовъ, имѣющихъ равныя производящія, пропорціональны радіусамъ основаній.*

Наконецъ, если $C = c$ и $A = a$, то $S = s$, т. е. *боковыя поверхности конусовъ, которыхъ основанія и производящія равны, равны между собою.*

Предложеніе.

§ 554. *Боковая поверхность конуса измѣряется произведеніемъ его высоты на окружность, которой радіусъ равенъ перпендикуляру, возставленному въ сѣкущей плоскости, проходящей черезъ ось, изъ середины производящей до пересѣченія съ осью.*

Фиг. 305-я.



Пусть ATO означаетъ прямоугольный треугольникъ производящій конусъ, TO — ось конуса, треугольникъ ABT сѣченіе конуса по оси TO, C — середина производящей AT, $CD \perp AT$; надо доказать, что боковая поверхность конуса $S = 2\pi CD \cdot TO$.

Намъ извѣстно (§ 551), что

$$S = 2\pi \cdot OA \cdot \frac{AT}{2}\ \text{или}\ S = 2\pi \cdot OA \cdot CT;$$

треугольники ATO и CDT, имѣя общій уголъ T и прямые углы при вершинахъ O и C, подобны; слѣд. $OA : CD = TO : CT$, отсюда $OA \cdot CT = CD \cdot TO$; поэтому $S = 2\pi CD \cdot TO$.

Предложеніе.

§ 555. *Боковая поверхность конуса, усѣченнаго парал-*

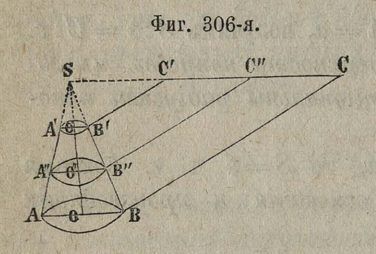
лельно основанію, измѣряется произведеніемъ полусуммы окружностей основаній на производящую.

Конусъ $SABO$ разсѣчемъ плоскостью $A'B'$ параллельно основанію и докажемъ, что боковая поверхность

$$AA'BB' = \frac{1}{2}\ (\text{окр. } OA + \text{окр. } O'A') \times BB'.$$

Разсѣчемъ конусъ плоскостью ABS, проходящею черезъ ось; а въ плоскости этого сѣченія изъ точки B возставимъ перпендикуляръ BC, длиною, равною окружности основанія; точку C соединимъ съ вершиною S; а черезъ точку B' проведемъ хорду $B'C'$, параллельную боку BC треугольника BCS. Прямая $B'C'$ равна окружности, описанной радіусомъ $O'B'$; въ самомъ дѣлѣ, окружности OB и $O'B'$ пропорціональны радіусамъ OB и $O'B'$; а эти послѣдніе пропорціональны прямымъ SB и SB';

Фиг. 306-я.



слѣдовательно $\quad$ *окр.* OB : *окр.* $O'B' = SB : SB'$;

но $\quad BC : B'C' = SB : SB'$;

три члена этихъ пропорцій порознь равны, ибо *окр.* $OB = BC$; поэтому и четвертые члены равны, т. е. *окр.* $O'B' = B'C'$.

Выраженія, измѣряющія боковую поверхность конуса $SABO$ и площадь треугольника SBC, одинаковы (§§ 551, 290); слѣдовательно боковая поверхность конуса $SABO$ равна площади треугольника SBC; по той же причинѣ, боковая поверхность конуса $SA'B'O'$ равна площади треугольника $SB'C'$. Отсюда заключаемъ, что боковая поверхность усѣченнаго конуса $ABB'A'$ равна площади трапеціи $B'C'CB$; слѣд. она измѣряется выраженіемъ $\frac{1}{2}(BC + B'C') \times BB'$ или $\frac{1}{2}$ (*окр.* OA + *окр.* $O'A'$) $\times BB'$.

§ 556. Слѣдствіе. Если черезъ середину B'' усѣченной производящей BB' проведемъ плоскость, параллельно основанію конуса, и прямую $B''C''$, параллельную основаніямъ трапеціи BC', то, какъ и прежде, докажемъ, что *окр.* $O''B'' = B''C''$. Извѣстно, что трапеція измѣряется также произведеніемъ $B''C'' \times BB'$; слѣдовательно боковая поверхность усѣченнаго конуса равна *окр.* $O''B'' \times BB$. И такъ, *боковая поверхность усѣченнаго конуса измѣряется произведеніемъ окружности сѣченія, равноотстоящаго отъ основаній, на производящую.*

Предложеніе.

§ 557. *Боковая поверхность усѣченнаго конуса измѣряется произведеніемъ усѣченной высоты на окружность, которой радіусъ равенъ длинѣ перпендикуляра, возставленнаго въ сѣкущей плоскости, проходящей черезъ ось, изъ середины усѣченной производящей до пересѣченія съ осью.*

Въ плоскости ABS (фиг. 307), черезъ середину B'', усѣченной производящей BB', проведемъ перпендикуляръ $B''F$ къ BB' до пересѣченія въ F съ осью конуса SO, и докажемъ, что поверхность усѣченнаго конуса $ABB'A'$ равна произведенію высоты OO' усѣченнаго конуса на окружность, описанную радіусомъ FB''. Въ той же плоскости ABS проведемъ $B'G$ перпендикулярно къ AB; получимъ подобные треугольники $BB'G$ и $B''O''F$, потому что стороны угловъ B' и B'' взаимно перпендикулярны, а углы G и O'' — прямые; слѣд.

Фиг. 307-я.

$$BB' : B''F = B'G : B''O'';$$

отсюда $BB' \times B''O'' = B''F \times B'G$. Но боковая поверхность усѣченнаго конуса равна $2\pi O''B'' \times BB'$ (§ 556); слѣд., замѣнивъ произведеніе послѣднихъ двухъ множителей, ему равнымъ, получимъ

$$2\pi B''F \times B'G \text{ или } 2\pi B''F \times OO'.$$

Предложеніе.

§ 558. *Можно въ конусъ вписать и около него описать правильныя пирамиды, которыхъ разность объемовъ будетъ меньше всякаго даннаго количества.*

Въ данномъ конусѣ впишемъ и около него опишемъ правильныя пирамиды, которыхъ основанія были бы правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ. Для краткости примемъ слѣдующія означенія:

	Объемы.	Площади основаній.	Высоты.
конуса:	V,	Q,	H,
вписанной пирамиды:	V',	Q',	H,
описанной пирамиды:	V'',	Q'',	H.

На основаніи § 508,

$$V'' = \tfrac{1}{3}Q''H,\quad V' = \tfrac{1}{3}Q'H; \text{ отсюда } V'' - V' = \tfrac{1}{3}H(Q'' - Q').$$

Если удваивать число сторонъ основаній пирамидъ, то $Q''-Q'$ будетъ безконечно-малое (§ 347), H остается постояннымъ; слѣд. $V''-V'$ можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества.

§ 559. Слѣдствіе. Оставивъ предъидущія означенія объемовъ конуса и пирамидъ, вписанной и описанной, имѣемъ, вслѣдствіе очевидности, аксіомы,

$$V''>V>V';$$

отсюда $V''-V$ и $V-V'$, каждое, будетъ меньше разности $V''-V'$, а эту послѣднюю можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества. Поэтому, *всегда можно въ конусъ вписать или около него описать такую правильную пирамиду, которой объемъ будетъ разниться отъ объема конуса на безконечно-малое количество.* На этомъ основаніи *объемъ конуса есть предѣлъ, какъ для вписанныхъ, такъ и описанныхъ объемовъ правильныхъ пирамидъ, если число ихъ граней увеличивать произвольно.*

Предложеніе.

§ 560. *Объемъ конуса измѣряется третьею частью произведенія площади его основанія на высоту.*

Около конуса опишемъ правильную пирамиду; оставивъ означенія объемовъ, площадей основаній и высоту тѣ же, что въ § 558, получимъ

$$V''=\tfrac{1}{3}Q''\times H.$$

Если удваивать число сторонъ основанія пирамиды, то, на основаніи предъидущаго §, получимъ $V''=V+\alpha$; также $Q''=Q+\beta$, гдѣ α и β—безконечно-малыя; слѣд.

$$V+\alpha=\tfrac{1}{3}(Q+\beta)H \text{ или } V+\alpha=\tfrac{1}{3}QH+\tfrac{1}{3}\beta H.$$

Изъ послѣдняго равенства получимъ $V=\frac{1}{3}QH$.

§ 561. Слѣдствіе. Пусть V и v означаютъ объемы двухъ конусовъ, R и r — радіусы основаній, H и h—высоты. $V=\frac{1}{3}\pi R^2\times H$, $v=\frac{1}{3}\pi r^2\times h$; отсюда $V:v=\pi R^2\times H:\pi r^2\times h$.

Поэтому, *объемы конусовъ пропорціональны произведеніямъ площадей ихъ основаній на высоты.*

Если $R=r$, то $V:v=H:h$; значитъ, *объемы конусовъ, имѣющихъ равныя основанія, пропорціональны высотамъ.*

Если $H = h$, то $V : v = R^2 : r^2$; поэтому *объемы конусовъ, имѣющихъ равныя высоты, пропорціональны квадратамъ радіусовъ основаній.*

Наконецъ, если $R = r$ и $H = h$, то $V = v$; поэтому *объемы конусовъ равны между собою, если у нихъ основанія и высоты равны.*

§ 562. *Примѣчаніе.* Примѣняясь къ § 354, найдемъ, что конусъ можно принять за правильную пирамиду о безконечномъ числѣ боковыхъ граней; при этомъ апоѳема пирамиды будетъ производящею конуса, а высота пирамиды и конуса будетъ общая. Боковая поверхность правильной пирамиды измѣряется половиною произведенія периметра основанія на апоѳему пирамиды (§ 460); а объемъ пирамиды измѣряется произведеніемъ площади ея основанія на треть высоты (§ 508); притомъ выраженія эти не зависятъ отъ числа боковыхъ граней пирамиды; поэтому, *боковая поверхность конуса измѣряется половиною произведенія окружности основанія на производящую; а объемъ конуса измѣряется третьею частью произведенія площади основанія его на высоту.*

Предложеніе.

§ 563. *Объемъ конуса, усѣченнаго параллельно основанію, равенъ суммѣ трехъ конусовъ, у которыхъ высота общая съ высотою усѣченнаго конуса, а основаніями ихъ служатъ оба основанія усѣченнаго конуса и площадь средняя пропорціональная между ними.*

Пусть V и v означаютъ объемы полнаго конуса и отсѣченнаго, R и r— радіусы ихъ основаній, H и h высоты; искомый объемъ усѣченнаго конуса будетъ равенъ разности $V - v$; а высота усѣченнаго конуса будетъ $H - h$.

Намъ извѣстно, что $\left\{\begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \\ v = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \end{array}\right\}$ отсюда $V - v = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

или $$V - v = \frac{\pi}{3}(R^2 H - r^2 h).$$

Извѣстно также, что $R : r = H : h$;

отсюда $R - r : R = H - h : H$; слѣд. $H = \dfrac{R(H - h)}{R - r}$;

$$R - r : r = H - h : h; \text{ отсюда } h = \frac{r(H-h)}{R-r}.$$

Поэтому
$$V - v = \frac{\pi}{3}\left[\frac{R^3(H-h)}{R-r} - \frac{r^3(H-h)}{R-r}\right],$$

$$= \frac{\pi(H-h)}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r},$$

$$= \frac{(H-h)}{3} \cdot (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr).$$

Этимъ и доказывается предложеніе; потому что $H - h$ выражаетъ высоту усѣченнаго конуса, πR^2 и πr^2 — площади основаній усѣченнаго конуса; а Rr есть средняя пропорціональная между R^2 и r^2; слѣд. πRr есть средняя пропорціональная между площадями основаній πR^2 и πr^2.

---

7. Поверхности шароваго сегмента, шара, пояса и всего шара. — Объемъ шароваго сектора, шара, сегмента и сферическаго слоя.

§ 564. Если разсѣчь шаръ плоскостью, то его объемъ и поверхность раздѣляется на двѣ части; каждая часть объема называется *шаровымъ сегментомъ*, а часть шаровой поверхности — *сегментною поверхностью*. Поэтому *шаровымъ сегментомъ называется часть шара, отсѣкаемая плоскостью; а сегментною поверхностью называется часть шаровой поверхности, отсѣкаемой плоскостью*. Кругъ, отсѣкающій отъ шара сегментъ, называется *основаніемъ* сегмента; онъ же называется основаніемъ сегментной поверхности. Часть перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара на основаніе сегмента, и заключающаяся между этимъ основаніемъ и сегментною поверхностью, — называется *высотою* сегмента; а также — высотою сегментной поверхности.

§ 565 Шаровой сегментъ и его поверхность можно получить отъ вращенія части круговаго сегмента и дуги. Дѣйствительно, возьмемъ дугу AB окружности O; черезъ конецъ ея A проведемъ діаметръ AA', а изъ другаго конца B опустимъ пер-

пендикуляръ BC на AA'. Вообразимъ, что фигура вращается около діаметра AA': полукругъ ABA' опишетъ шаръ, а перпендикуляръ BC опишетъ кругъ, который и раздѣлитъ шаръ и его поверхность на двѣ части; такимъ образомъ дуга AB опишетъ сегментную поверхность, а фигура ACB — шаровой сегментъ; кругъ, описанный радіусомъ BC, будетъ основаніе, а CA — высота сегмента и его поверхности.

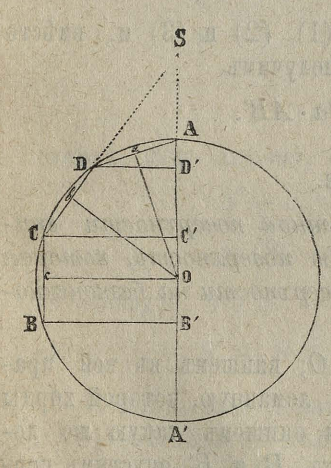
Фиг. 038-я.

Предложеніе.

§ 566. *Поверхность, происшедшая отъ вращенія правильной ломанной линіи около діаметра круга, описаннаго около этой линіи, равна окружности, вписанной въ этой линіи, умноженной на проэкцію ломанной на ось вращенія.*

Возьмемъ какую нибудь дугу AB окружности O; черезъ одинъ конецъ ея A проведемъ діаметръ AA'; дугу AB раздѣлимъ на произвольное число равныхъ частей AD, DC, CB и соединимъ смежныя точки дѣленія между собою, получимъ правильную ломанную. Опустивъ перпендикуляры Oa, Ob, Oc на хорды AD, DC и CD, получимъ $Oa = Ob = Oc$; окружность, описанная радіусомъ Oa, будетъ вписанною, а описанная радіусомъ OA — описанною около правильной ломанной. Означимъ проэкціи AD', $D'C'$, $C'B'$ хордъ AD, DC, CB на діаметръ AA'; прямая AB' выразитъ проэкцію ломанной $ADCB$ на томъ же діаметрѣ AA'.

Фиг. 309-я.



Вообразимъ, что вся фигура вращается около діаметра AA'; при этомъ прямыя AD, DC, CB произведутъ нѣкоторыя поверхности, которыя составятъ поверхность отъ вращенія ломанной $ADCB$; надо доказать, что

$$\text{пов. } ADCB = \text{окр. } Oa \times AB',$$

гдѣ подъ выраженіемъ пов. $ADCB$ будемъ разумѣть поверх-

ность, происшедшую отъ вращенія ломонной $ADCB$; точно также поверхность, происшедшую отъ вращенія, напримѣръ, прямой AD или BC, будемъ означать пов. AB, пов. BC.

Очевидно, что пов. $ADCB =$ пов. $AD +$ пов. $DC +$ пов. CB.

Ипотенуза AD, при вращеніи прямоугольнаго треугольника ADD' около катета AD', произведетъ боковую поверхность конуса; слѣд. на основаніи § 554,

$$\text{пов. } AD = 2\pi.\ Oa \cdot AD' \ldots\ldots (1).$$

Если CD на своемъ продолженіи пересѣчетъ ось вращенія AA', то прямоугольный треугольникъ SCC' произведетъ конусъ; прямая DC произведетъ боковую поверхность усѣченнаго конуса; на основаніи § 567, получимъ

$$\text{пов. } DC = 2\pi \cdot Oa \cdot D'C' \ldots\ldots (2).$$

Если прямая CB параллельна оси вращенія AA', то прямоугольникъ CB' произведетъ цилиндръ; а прямая CB—боковую его поверхность; слѣд., на основаніи § 539, получимъ

$$\text{пов. } CB = 2\pi \cdot Oa \cdot C'B' \ldots\ldots (3).$$

Сложимъ по частямъ равенства (1), (2) и (3) и, вмѣсто $AD' + D'C' + C'B'$, возьмемъ AB', получимъ

$$\text{пов. } ADCB = 2\pi \cdot Oa \cdot AB'.$$

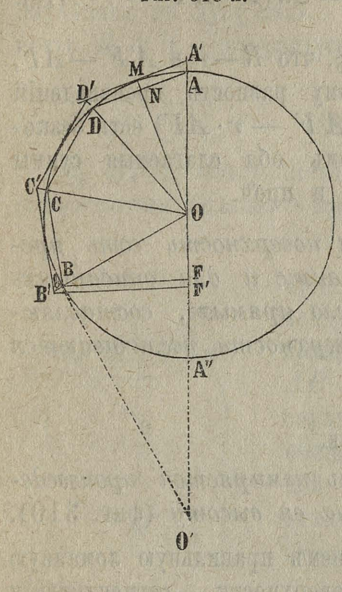
Предложеніе.

§ 567. *Всегда можно въ сегментной поверхности вписать или около нея описать такую поверхность, которая будетъ разниться отъ сегментной поверхности на безконечно-малое количество* (фиг. 310).

Возьмемъ дугу AB окружности O; впишемъ въ ней правильную ломанную $ADCB$, т. е. такую ломанную, которой хорды AD, DC, CB равны между собою, и опишемъ такую же ломанную (§ 317) $A'D'C'B'$; изъ точекъ B и B' опустимъ перпендикуляры на діаметръ AA''; проведемъ апоѳемы ломанныхъ, $OM = R$ и $ON = r$; разность ихъ $R - r$ будетъ безконечно-малое, если постепенно удваивать число хордъ ломанныхъ, что и предполагается при доказательствѣ предложенія. Замѣтимъ еще, что и разность $A'F' - AF = AA' + FF'$ также будетъ безконечно-малая; ибо AA' можно принять за разность апоѳемъ правильныхъ многоугольниковъ, описаннаго и вписаннаго въ окруж-

ности, которой радіусъ равенъ OA'; слѣд. AA' и меньшая ея FF' будутъ безконечно-малыя.

Фиг. 310-я.



При обращеніи фигуры около діаметра AA'', дуга AB произведетъ сегментную поверхность, которую означимъ черезъ S; ломанныя $ADCB$ и $A'D'C'B'$ произведутъ вписанную и описанную поверхности,—назовемъ ихъ буквами, первую S', а вторую S''; прямая BB' произведетъ поверхность усѣченнаго конуса, — назовемъ ее буквою m. Надо доказать, что $S—S'$, а также $S''—S$ будутъ безконечно-малыя, конечно, при неопредѣленномъ увеличиваніи числа хордъ ломанныхъ, производящихъ эти поверхности.

Три поверхности $(S''+m)$, S и S' имѣютъ общій обводъ — окружность, описанную радіусомъ FB; слѣд. каждая объемлющая больше своей объемлемой; поэтому

$$(S''+m)>S>S';$$

отсюда, какъ аксіома, слѣдуетъ, что

$$S-S'<(S''+m)-S' \;.\;.\;.\;.\;.(1)$$

$$\text{и}\;\;(S''+m)-S<(S''+m)-S';$$

но очевидно, что $S''-S<(S''+m)-S$;

слѣд. $$S''-S<(S''+m)-S' \;.\;.\;.\;.\;.\;(2).$$

И такъ, если докажемъ, что вторая часть неравенствъ (1) и (2) — безконечно-малая, то и первыя части, т. е. $S-S'$ и $S''-S$, будутъ безконечно-малыя, и такимъ образомъ предложеніе будетъ доказано. Разсмотримъ эту вторую часть, т. е. $m+(S''-S')$; члены ея m и $(S''-S')$ суть безконечно-малыя. Дѣйствительно, проведя изъ b, середины прямой BB', перпендикуляръ къ ней bO' до пересѣченія съ діаметромъ AA'', получимъ $m=$ пов. $BB'=2\pi\cdot O'b\cdot FF'$ (§ 557); множитель FF', какъ меньшій $BB'=AA'$, есть безконечно-малое; другой множитель $2\pi\cdot O'b$ — конечное число; слѣд. m — безконечно-малое.

Перейдемъ къ другому члену $S'' - S'$; на основаніи предъидущаго §,

$$\left.\begin{array}{l} S'' = 2\pi R \cdot A'F', \\ S' = 2\pi r \cdot AF; \end{array}\right\} \text{ отсюда } S'' - S' = 2\pi(R \cdot A'F' - r \cdot AF).$$

Мы уже замѣтили въ началѣ этого §, что $R - r$ и $A'F' - AF$, каждое, есть безконечно-малое; поэтому разность произведеній $R \cdot A'F' - r \cdot AF$ (§ 333) и $2\pi(R \cdot A'F' - r \cdot AF)$ есть безконечно-малое (§ 322). Такимъ образомъ оба слагаемыя суммы $m + (S'' - S')$ суть безконечно малыя и проч.

§ 568. Слѣдствіе. *Сегментная поверхность есть предѣлъ для вписанныхъ въ ней, а также и для описанныхъ поверхностей, при условіи, что число прямыхъ, составляющихъ данныя, производящія эти поверхности увеличиваются произвольно.*

Предложеніе.

§ 569. *Сегментная поверхность измѣряется произведеніемъ окружности большаго круга на ея высоту* (фиг. 310).

Въ дугѣ AB окружности O впишемъ правильную ломанную $ADCB$; назовемъ буквами S и S' поверхности — сегментную и вписанную въ ней; R и H — радіусъ шара и общую высоту AF сегментной и вписанной поверхностей; пусть r означаетъ апоѳему ON ломанной $ADCB$. Надо доказать, что $S = 2\pi R \times H$.

Съ удвоеніемъ числа линій вписанной ломанной, на основаніи предъидущаго §, назвавъ буквою α безконечно-малое количество, получимъ

$$S - S' = \alpha; \text{ отсюда } S' = S - \alpha \ldots (1).$$

На основаніи § 566, $S' = 2\pi r H$; положивъ $R - r = \beta$, гдѣ β — безконечно-малое, получимъ $r = R - \beta$; слѣд. $S' = 2\pi H(R - \beta)$ или

$$S' = 2\pi RH - 2\pi H \cdot \beta \ldots (2).$$

Изъ (1) и (2) равенствъ, имѣемъ

$$S - \alpha = 2\pi RH - 2\pi H \cdot \beta,$$

гдѣ $2\pi H \cdot \beta$ — безконечно-малое; поэтому, на основаніи § 335, $S = 2\pi R \times H$.

При доказательствѣ, вмѣсто вписанной поверхности въ шаровомъ сегментѣ, можно разсматривать описанную поверхность.

* *Примѣчаніе.* Извѣстно (§ 576), что пов. $ADCB = 2\pi r \cdot H$. Выраженіе это не зависитъ отъ числа хордъ, составляющихъ ломанную; слѣд. оно будетъ справедливо и при безконечномъ числѣ хордъ, составляющихъ ломанную; но тогда ломанная $ADCB$ обратится въ дугу AB, пов. $ADCB$ — въ сегментную поверхность S, и r — въ радіусъ R; поэтому $S = 2\pi R \cdot H$.

Предложеніе.

§ 570. *Поверхность шара измѣряется произведеніемъ окружности большаго круга на діаметръ шара.*

Фиг. 311-я.

На окружности O возьмемъ какую нибудь точку B, изъ которой опустимъ перпендикуляръ BC на діаметръ AA'; при вращеніи фигуры около діаметра AA', дуги AB и $A'B$ произведутъ сегментныя поверхности, для которыхъ кругъ BC будетъ общимъ основаніемъ; а высотами для первой будетъ AC, а для второй $A'C$. Сумма этихъ поверхностей составитъ поверхность шара. На основаніи предъидущаго предложенія,

$$\text{пов. } AB = 2\pi \cdot OA \cdot AC, \quad \text{пов. } A'B = 2\pi \cdot OA \cdot A'C;$$

отсюда $$\text{пов. } AB + \text{пов. } AB' = 2\pi \cdot OA\,(AC + A'C),$$

$$\text{или пов. шара} = 2\pi OA \cdot AA'.$$

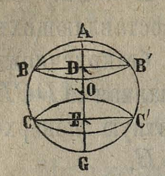
§ 571. Слѣдствіе. Пусть S и R означаютъ поверхность и радіусъ шара; вставивъ въ предъидущее выраженіе, вмѣсто OA, радіусъ R, и вмѣсто AA', ему равное $2R$, получимъ $S = 4\pi R^2$; выраженіе πR^2 есть площадь большаго круга. Поэтому, *поверхность шара равна учетверенной площади большаго круга.*

§ 572. *Поясомъ* (*зоною*) называется часть шаровой поверхности, заключающаяся между двумя параллельными плоскостями. Разстояніе между этими плоскостями называется *высотою пояса.*

Предложеніе.

§ 573. *Поверхность пояса измѣряется произведеніемъ окружности большаго круга на высоту пояса.*

Фиг. 312-я.



Пусть BB' и CC' означаютъ параллельные круги, между которыми заключается поясъ $BCB'C'$; изъ центра шара O проведемъ перпендикуляръ AG къ этимъ кругамъ; DF выразитъ высоту пояса; надобно доказать, что поверхность пояса $BCC'B' = 2\pi \cdot OA \cdot DF$.

Очевидно, что поясъ равенъ разности сегментныхъ поверхностей ACC' и ABB'; слѣд. (§ 569)

$$\text{пов. пояса } BCC'B' = 2\pi \cdot OA \cdot AF - 2\pi\, OA \cdot AD,$$
$$= 2\pi \cdot OA\,(AF - AD),$$
$$= 2\pi \cdot OA \cdot DF.$$

§ 574. *Шаровымъ секторомъ* называется тѣло, происходящее отъ обращенія круговаго сектора около одного изъ своихъ радіусовъ. При этомъ дуга сектора производитъ сегментную поверхность (фиг. 313).

Если въ дугѣ AB круговаго сектора AOB впишемъ правильную ломанную $ADCB$ и опишемъ ломанную линію $A'D'C'B'$, и вообразимъ, что фигура вращается около діаметра AA'', то круговой секторъ AOB произведетъ шаровой секторъ; многоугольники $ADCBO$ и $A'D'C'B'O$ произведутъ тѣла, изъ которыхъ первое называется *вписаннымъ въ шаровомъ секторѣ*, а второе — *описаннымъ* около него.

Предложеніе.

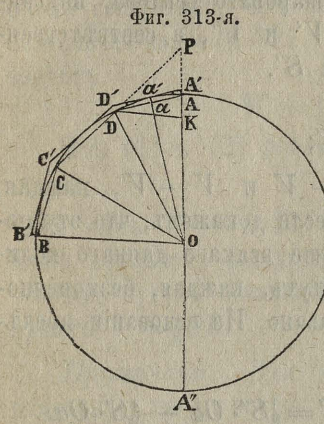
§ 575. *Объемъ тѣла, вписаннаго въ шаровомъ секторѣ, равенъ одной трети произведенія соотвѣтствующей поверхности, вписанной въ сегментной поверхности, на апоѳему ломанной линіи, производящей эту поверхность* (фиг. 313).

Пусть $ADCB$ означаетъ вписанную правильную ломанную въ дугѣ AB окружности O; перпендикуляръ Oa изъ центра на сторону AD означитъ апоѳему этой ломанной; положимъ, что фигура вращается около діаметра AA'', докажемъ, что объемъ $ADCBO = \frac{1}{3}$ пов. $ADCB \cdot Oa$.

Объемъ этотъ состоитъ изъ объемовъ тѣлъ, происшедшихъ отъ обращенія треугольниковъ ADO, DCO и CBO около оси AA''; найдемъ каждый объемъ. Проведя DK перпендикулярно къ AA'', разобьемъ треугольникъ ADO на два прямоугольные

треугольника ADK и KDO; каждый изъ нихъ, при обращеніи около оси AA'', произведетъ конусъ; у этихъ конусовъ будетъ общее основаніе — кругъ $\pi \overline{DK}^2$, а высотами ихъ будутъ для одного AK, а для другого OK; слѣд., объемъ $ADO = {}^1/_3 \pi \overline{DK}^2 \times AO$.

Фиг. 313-я.



Произведеніе $DK \times AO$ выражаетъ удвоенную площадь треугольника ADO; произведеніе $Oa \times AD$ также выражаетъ удвоенную площадь треугольника ADO; поэтому $DK \times AO = Oa \times AD$, и объемъ $ADO = {}^1/_3 \pi DK \cdot Oa \cdot AD$, или объемъ $ADO = {}^1/_3 2\pi DK \cdot \frac{1}{2} AD \cdot Oa$; но боковая поверхность конуса, происшедшаго отъ обращенія треугольника ADK около его катета AK, равна $2\pi \cdot DK \cdot {}^1/_2 AD$; поэтому объемъ $ADO = {}^1/_3$ пов. $AD \times Oa$....(1).

Перейдемъ къ опредѣленію объема, происшедшаго отъ вращенія треугольника DCO около оси AA''. Продолживъ бокъ DC до пересѣченія съ продолженною осью AA'' въ точкѣ P, найдемъ, что объемъ $DCO =$ *объем.* PCO — *объем.* DPO. Два послѣдніе объема опредѣлятся точно такъ же, какъ и объемъ вышенайденный, по (1) равенству; слѣд.

объемъ $DCO = {}^1/_3$*пов.* $PC \times Oa$ — ${}^1/_3$*пов.* $PD \times Oa$,

или объемъ $DCO = {}^1/_3$(*пов.* PC — *пов.* PD) $\cdot Oa$;

поэтому объемъ $DCO = {}^1/_3$*пов.* $DC \times Oa$....(2).

Точно такъ же найдемъ

объемъ $CBO = {}^1/_3$*пов.* $CB \times Oa$....(3).

Сложивъ (1), (2) и (3) равенства, найдемъ, что первая часть выразитъ объемъ, происшедшій отъ вращенія многоугольника $ADCBO$ около оси AA''; а во вторую часть войдетъ сумма поверхностей, происшедшихъ отъ вращенія прямыхъ AD, DC, CB или *пов.* $ADCB$; и такъ

объемъ $ADCBO = {}^1/_3$*пов.* $ADCB \times Oa$....(4).

Предложеніе.

§ 576. *Всегда можно въ шаровомъ секторѣ вписать или описать около него такое тѣло, котораго объемъ будетъ*

разниться отъ объема этого сектора на количество безконечно-малое.

Въ дугѣ AB окружности O (фиг. 313) впишемъ и опишемъ правильныя ломанныя $ADCB$ и $A'D'C'B'$; проведемъ ихъ апоѳемы Oa и Oa', назовемъ объемы шароваго сектора, вписаннаго и описаннаго тѣла буквами V, V' и V'', а соотвѣтственныя имъ поверхности буквами S, S' и S''.

Очевидно, что

$$V'' > V > V';$$

отсюда слѣдуетъ, что разности $V'' - V$ и $V - V'$, каждая, меньше разности $V'' - V'$; а потому, если докажемъ, что эту послѣднюю разность можно сдѣлать меньше всякаго даннаго количества, то и первыя двѣ разности будутъ, каждая, безконечно-малая, и слѣд. предложенiе будетъ доказано. На основанiи предъидущаго предложенiя,

$$\left.\begin{aligned} V'' &= \tfrac{1}{3}S'' \cdot Oa', \\ V' &= \tfrac{1}{3}S' \cdot Oa; \end{aligned}\right\} \text{ отсюда } V'' - V' = \tfrac{1}{3}S'' \cdot Oa' - \tfrac{1}{3}S' \cdot Oa.$$

Удваивая число линiй, составляющихъ вписанную и описанную ломанныя, получимъ такiе объемы, которыхъ поверхности S'' и S', а также апоѳемы Oa' и Oa будутъ разниться на безконечно-малое (§§ 567, 345); поэтому, на основанiи § 333, и разность $V'' - V'$ будетъ безконечно-малое количество.

§ 577. Слѣдствiе. *Объемъ шароваго сектора есть предѣлъ для объемовъ тѣлъ вписанныхъ въ этомъ секторѣ и описанныхъ около него, при условiи, что число прямыхъ, составляющихъ ломанныя, производящiя поверхности, увеличивается произвольно.*

Предложенiе.

§ 578. *Объемъ шароваго сектора измѣряется одною третьею частью произведенiя соотвѣтствующей сегментной поверхности на радiусъ шара.*

Около дуги AB опишемъ правильную ломанную $A'D'C'B'$ (фиг. 313). Пусть V и V'' означаютъ объемы шароваго сектора и описаннаго около него тѣла; S и S'' соотвѣтствующiя имъ поверхности, первая сегментная, а вторая описанная; R — радiусъ шара; α и β — безконечно-малыя количества; надо доказать, что $V = \frac{1}{3}SR$. На основанiи предъидущаго §, получимъ

$$V'' = V + \alpha \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Въ предъидущемъ, § 576, мы видѣли, что $V'' = \frac{1}{3}S'' \cdot R$; также намъ извѣстно, что всегда можно найти описанную поверхность около сегментной, которая будетъ разниться отъ послѣдней на безконечно-малое (§ 567); поэтому $S'' = S + \beta$ и $V'' = \frac{1}{3}(S + \beta)R$; значитъ

$$V'' = \frac{1}{3}SR + \frac{1}{3}\beta R \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Изъ (1) и (2) равенствъ имѣемъ

$$V + \alpha = \frac{1}{3}SR + \frac{1}{3}R\beta;$$

такъ какъ V, S и R, при безпрестанномъ увеличиваніи числа линій ломанной, остаются постоянными, а α и β, при томъ же условіи, будутъ безконечно-малыми, то, на основаніи § 335, получимъ $V = \frac{1}{3}SR$.

Примѣчаніе. Для доказательства можно разсматривать и вписанную поверхность, что читатель можетъ самъ исполнить; а здѣсь замѣтимъ, какъ средство для памяти, что объемъ тѣла вписаннаго въ шаровомъ секторѣ можно принять за объемъ самого сектора, при безконечно-большомъ числѣ хордъ вписанной ломанной; а вмѣстѣ съ тѣмъ вписанную сегментную поверхность за самую сегментную поверхность.

Но $\qquad V' = \frac{1}{3}S' \cdot Oa$ (§ 575), то $V = \frac{1}{3}SR$.

Предложеніе.

§ 579. *Объемъ шара измѣряется одною третьею частью произведенія шаровой поверхности на радіусъ шара.*

Пусть V означаетъ искомый объемъ шара, S — его поверхность, R — радіусъ; надобно доказать, что $V = \frac{1}{3}S \times R$.

Возьмемъ круговой секторъ, котораго дуга равна четверти окружности, а радіусъ равенъ R; отъ обращенія этого сектора около одного изъ его радіусовъ, получимъ половину шара; слѣд., на основаніи предъидущаго предложенія,

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}S \times R; \text{ отсюда } V = \frac{1}{3}S \times R.$$

§ 580. Слѣдствіе. Взявъ, вмѣсто шаровой поверхности S, учетверенную площадь большаго круга $4\pi R^2$, получимъ

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

И такъ, по данному радіусу опредѣлится объемъ шара; обратно, по данному объему V можно опредѣлить радіусъ, — стоитъ только рѣшить послѣднее уравненіе относительно R.

Чтобы выразить объемъ шара въ его діаметрѣ D, вставимъ въ послѣднюю формулу, вмѣсто R, ему равное $\frac{1}{2}D$; по сокращеніи, получимъ $V=\frac{1}{6}\pi D^3$.

Предложеніе.

§ 581. *Объемъ шароваго сегмента равномѣренъ съ цилиндромъ, котораго радіусъ основанія равенъ высотѣ сегмента; высота же цилиндра равна радіусу шара безъ одной трети высоты сегмента* (фиг. 311).

Возьмемъ круговой секторъ AOB; изъ точки B проведемъ перпендикуляръ BC къ діаметру AA' и будемъ обращать круговой секторъ ABO около діаметра AA', получимъ шаровой секторъ, который составится изъ конуса, происшедшаго отъ обращенія прямоугольнаго треугольника BCO около катета CO и шароваго сегмента ABC. Объемъ этого послѣдняго назовемъ x, высоту его AC означимъ черезъ h, буквами V и v назовемъ объемы шароваго сектора и конуса, буквою R, какъ всегда, радіусъ шара. Очевидно, что $x=V-v$; а какъ поверхность шароваго сегмента равна $2\pi Rh$, то

$$x=2\pi Rh\cdot\frac{R}{3}-\pi\overline{BC}^2\frac{CO}{3}\cdot$$

Фиг. 311-я.

Перпендикуляръ BC къ діаметру AA' есть средняя пропорціональная линія между отрѣзками AC и $A'C$; слѣд. $\overline{BC}^2=AC\cdot A'C$, или $\overline{BC}^2=h(2R-h)$; прямая $CO=AO-AC$ или $CO=R-h$; поэтому $x=\frac{2\pi R^2h}{3}-\frac{\pi h(2R-h)(R-h)}{3}$; отъ умноженія $(2R-h)\times(R-h)$, получимъ $2R^2-3Rh+h^2$; слѣд.

$$x=\frac{\pi h}{3}(2R^2-2R^2+3Rh-h^2)=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)\cdot$$

§ 582. *Шаровымъ сегментомъ о двухъ основаніяхъ или слоемъ называется часть объема шара, заключающаяся между двумя параллельными плоскостями*; разстояніе между этими плоскостями называется *высотою*, а круги сѣченій—*основаніями*.

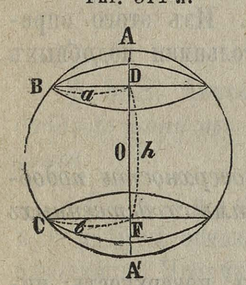
Предложеніе.

§ 583. *Объемъ сегмента о двухъ основаніяхъ равенъ полусуммѣ объемовъ цилиндровъ, построенныхъ на основаніяхъ сег-*

мента и имѣющихъ одинаковую высоту съ сегментомъ, сложенной съ объемомъ шара, діаметръ котораго равенъ той же высотѣ.

Возьмемъ какую нибудь дугу BC окружности O; проведемъ діаметръ AA' и опустимъ на него перпендикуляры BD и CF, которые, при вращеніи фигуры около оси AA', опишутъ круги, составляющіе основанія сегмента о двухъ основаніяхъ; такимъ образомъ искомый сферическій слой будетъ заключаться между этими кругами и поверхностью, описанною дугою BC; а перпендикуляръ DF будетъ высотою этого слоя. Пусть, для краткости, радіусъ $OA=R$, $AF=H$, $AD=H'$, $DF=h$, $BD=a$, $CF=b$; искомый сегментъ, происшедшій отъ вращенія $BCFD$ — буквою V. Очевидно, что объемъ V равенъ разности объемовъ шаровыхъ сегментовъ, происшедшихъ отъ вращенія фигуръ ACF и ABD около оси AA'; поэтому, на основаніи § 581, получимъ

Фиг. 314-я.



$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)-\pi H'^2\left(R-\frac{H'}{3}\right),$$

или $$V=\pi R\ (H^2-H'^2)-\tfrac{1}{3}\pi\,(H^3-H'^3).$$

Но $H-H'=h$; слѣд.

$$H^2-H'^2=h\ (H+H'),\quad H^3-H'^3=h\ (H^2+HH'+H'^2);$$

поэтому $V=\pi h\ \left[R(H+H')-\tfrac{1}{3}(H^2+HH'+H'^2)\right].$

На основаніи свойствъ перпендикуляра къ діаметру, имѣемъ

$$a^2=H'(2R-H'),\quad b^2=H(2R-H);$$

отъ сложенія этихъ равенствъ, получимъ

$$a^2+b^2=2R(H+H')-(H^2+H'^2);$$

отсюда $$R(H+H')=\frac{a^2+b^2+H^2+H'^2}{2}.$$

Вставивъ эту величину въ выраженіе для V, получимъ

$$V=\pi h\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{(H-H')^2}{6}\right),$$

или $$V=\frac{\pi a^2h+\pi b^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6},$$

гдѣ $\pi a^2 \cdot h$ и $\pi b^2 \cdot h$ можно принять за объемы цилиндровъ, которые имѣютъ общую высоту h, а радiусы основанiй равны a и b; выраженiе $\frac{1}{6}\pi h^3$ — можно принять за объемъ шара, котораго дiаметръ равенъ h (§ 580).

---

8. Подобiе цилиндровъ и конусовъ. — Отношенiе поверхностей и объемовъ шаровъ, описанныхъ разными радiусами. — Отношенiя поверхностей и объемовъ шара, цилиндра и конуса, описанныхъ около шара.

§ 584. *Цилиндры называются подобными, когда ихъ высоты пропорцiональны радiусамъ основанiй.* Изъ этого опредѣленiя слѣдуетъ, что производящiе прямоугольники подобныхъ цилиндровъ также подобны между собою.

Предложенiе.

§ 585. *Боковыя, а также и полныя поверхности подобныхъ цилиндровъ пропорцiональны квадратамъ сходственныхъ линiй.*

1) Пусть S, R и H означаютъ боковую поверхность цилиндра; радiусъ основанiя и высоту; а s, r и h—тѣ же величины въ другомъ цилиндрѣ, который подобенъ первому.

Имѣемъ $S=2\pi RH$, $s=2\pi rh$; отсюда $\frac{S}{s}=\frac{R}{r}\cdot\frac{H}{h}$;

вслѣдствiе подобiя цилиндровъ,

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}; \text{ слѣд. } \frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{H^2}{h^2}.$$

2) Возьмемъ пропорцiи $S:s=R^2:r^2$, $2\pi R^2:2\pi r^2=R^2:r^2$; отсюда $S:s=2\pi R^2:2\pi r^2$ и

$$S+2\pi R^2 : s+2\pi r^2=R^2:r^2=H^2:h^2,$$

гдѣ первый и второй члены выражаютъ полныя поверхности цилиндровъ.

Предложенiе.

§ 586. *Объемы подобныхъ цилиндровъ пропорцiональны кубамъ сходственныхъ линiй.*

Пусть V и v означаютъ объемы двухъ подобныхъ цилиндровъ; R и r—радiусы основанiй; H и h—оси или высоты.

Возьмемъ $V=\pi R^2H$, $v=\pi r^2h$, отсюда $\frac{V}{v}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}$;

вслѣдствіе подобія цилиндровъ,

$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}; \text{ слѣд. } \frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{H^3}{h^3}.$$

§ 587. *Конусы называются подобными, когда ихъ высоты пропорціональны радіусамъ основаній.* Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что производящіе треугольники въ подобныхъ конусахъ такъ же подобны, и слѣдовательно производящія линіи пропорціональны высотамъ и радіусамъ основаній.

Предложеніе.

§ 588. *Боковыя, а также и полныя поверхности подобныхъ конусовъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ линій.*

1) Пусть S и s означаютъ поверхности подобныхъ конусовъ, R и r радіусы основаній, H и h—высоты или оси, K и k—производящія. Получимъ

$$S=2\pi R\frac{K}{2},\ s=2\pi r\frac{k}{2}; \text{ отсюда } \frac{S}{s}=\frac{R}{r}\times\frac{K}{k}.$$

Вслѣдствіе подобія конусовъ

$$\frac{R}{r}=\frac{K}{k}=\frac{H}{h}; \text{ поэтому } \frac{S}{s}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{K^2}{k^2}=\frac{H^2}{h^2}.$$

2) Возьмемъ пропорцію $S:s=\pi R^2:\pi r^2$;

отсюда $S+\pi R^2 : s+\pi r^2=S:s$; слѣд.

$S+\pi R^2 : s+\pi r^2=R^2:r^2=K^2:k^2=H^2:h^2$, гдѣ первые два члена выражаютъ полныя поверхности конусовъ.

Предложеніе.

§ 589. *Объемы подобныхъ конусовъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ линій.*

Пусть V и v означаютъ объемы подобныхъ конусовъ, а остальныя означенія тѣ же, что и въ предъидущемъ предложеніи. Имѣемъ

$$V=\pi R^2\cdot\frac{H}{3},\ v=\pi r^2\cdot\frac{h}{3}; \text{ отсюда } \frac{V}{v}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}.$$

Вслѣдствіе подобія конусовъ,

$$\frac{H}{h}=\frac{R}{r}=\frac{K}{k}; \text{ поэтому } \frac{V}{v}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{H^3}{h^3}=\frac{K^3}{k^3}.$$

Предложеніе.

§ 590. *Поверхности шаровъ пропорціональны квадратамъ радіусовъ, а объемы ихъ кубамъ.*

Пусть S и s означаютъ поверхности шаровъ, V и v—объемы, R и r—ихъ радіусы. Извѣстно, что

$$S=4\pi R^2,\ s=4\pi r^2; \text{ отсюда } S:s=R^2:r^2.$$

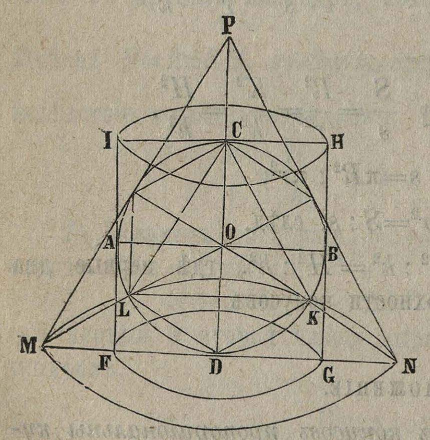
Извѣстно такъ же, что

$$V=\tfrac{4}{3}\pi R^3,\ v=\tfrac{4}{3}\pi r^3; \text{ отсюда } V:v=R^3:r^3.$$

Вопросъ.

§ 591. *Вывести отношенія между поверхностями, а равно и объемами шара и описанныхъ около него цилиндра и конуса.*

Фиг. 315-я.



Въ окружности O проведемъ два взаимно-перпендикулярные діаметры AB и CD; а черезъ концы ихъ касательныя; получимъ описанный квадратъ $FGHJ$. Впишемъ въ кругѣ правильный шестиугольникъ и соединимъ вершины черезъ одну, получимъ вписанный правильный треугольникъ LKC; опишемъ подобный ему треугольникъ MNP.

Вообразимъ, что фигура вращается около линіи POD; тогда полукругъ CAD произведетъ шаръ, прямоугольникъ $CDFJ$ — цилиндръ, а прямоугольный треугольникъ PDM— конусъ; этотъ конусъ и цилиндръ будутъ описанные около шара. Пусть R означаетъ радіусъ шара, онъ же радіусъ круга. Очевидно, что радіусъ основанія цилиндра $DF=R$, а высота цилиндра $CD=2R$. Для вычисленія поверхности и объема конуса опредѣлимъ

производящую MP или равную ей MN, радіусъ MD основанія конуса, который равенъ половинѣ MN, и наконецъ — высоту PD. Бока вписаннаго правильнаго шестиугольника DL и DK равны радіусамъ OL и OK; слѣд. четыреугольникъ $LDKO$ есть ромбъ; значитъ DK параллельна ML; но MD параллельна LK; слѣд. четыреугольникъ $MDKL$ есть параллелограммъ; а потому $ML=DK$ или $ML=R$, $MD=LK$ или, на основаніи § 324, $MD=R\sqrt{3}$; слѣд. MN или $MP=2R\sqrt{3}$. Высота конуса $PD=CD+PC$, или $CD+ML=2R+R$, или $PD=3R$.

1) Пусть S, S' S'' означаютъ полныя поверхности шара и описанныхъ цилиндра и конуса.

Поверхность шара.... $S=4\pi R^2$... (1).

Боковая поверхность цилиндра $=2\pi DF\cdot CD=4\pi R^2$.

Поэтому, *поверхность шара равномѣрна съ боковою поверхностью описаннаго около него цилиндра.*

Полн. пов. цил. $S'=4\pi R^2+2\pi\overline{DF}^2$ или $S'=6\pi R^2$..... (2).

Бок. пов. конус. $=2\pi MD\cdot\dfrac{MP}{2}$ или $2\pi\overline{MD}^2=6\pi R^2$.

Поэтому, *полная поверхность описаннаго цилиндра равномѣрна съ боковою поверхностью описаннаго конуса около шара.*

Полн. пов. кон. $S''=6\pi R^2+\pi\overline{MD}^2$ или $S''=9\pi R^2$..... (3).

Изъ (1), (2) и (3) равенствъ, имѣемъ

$$\frac{S}{4\pi R^2}=\frac{S'}{6\pi R^2}=\frac{S''}{9\pi R^2},$$

потому что каждое изъ этихъ отношеній равно 1-цѣ; а умноживъ эти равенства на πR^2, получимъ

$$\frac{S}{4}=\frac{S'}{6}=\frac{S''}{9}.$$

И такъ, *полныя поверхности шара, описанныхъ около него цилиндра и конуса пропорціональны числамъ 4, 6 и 9.*

Изъ предъидущаго равенства, имѣемъ

$$\frac{S}{S'}=\frac{2}{3},\ \frac{S'}{S''}=\frac{2}{3};$$

слѣд. $S:S'=S':S''$.

Значитъ, *полная поверхность цилиндра, описаннаго около шара, есть средняя пропорціональная между поверхностью шара и полною поверхностью конуса.*

2) Пусть V, V' и V'' означаютъ послѣдовательно объемы шара и описанныхъ цилиндра и конуса, получимъ

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \dots (1),$$

$$V' = \pi \overline{FD}^2 \cdot CD \text{ или } V' = 2\pi R^3 \dots (2),$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi \overline{DM}^2 \cdot DP \text{ или } V'' = 3\pi R^3 \dots (3).$$

Изъ этихъ трехъ равенствъ, получимъ

$$\frac{V}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{V'}{2\pi R^3} = \frac{V''}{3\pi R^3};$$

а умноживъ эти равныя на $\frac{1}{3}\pi R^3$, имѣемъ

$$\frac{V}{4} = \frac{V'}{6} = \frac{V''}{9}.$$

И такъ, *объемы шара, описанныхъ около него цилиндра и конуса пропорціональны числамъ 4, 6 и 9.*

Изъ предъидущихъ равенствъ, получимъ

$$V : V' = V' : V''.$$

Значитъ, *объемъ цилиндра, описаннаго около шара, есть средняя пропорціональная величина между объемами шара и описаннаго около него конуса.*

---

* 9. Полюсъ, ось и меридіанъ.—Кратчайшее разстояніе между двумя точками на поверхности шара. — Сферическій двусторонникъ; его поверхность. — Сферическій треугольникъ; стороны и углы его служатъ мѣрою плоскихъ и двугранныхъ угловъ треграннаго угла. Слѣдствія зависимости между сторонами и углами сферическаго треугольника.

* § 592. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на кругъ какого либо его сѣченія, проходитъ черезъ центръ этого сѣченія (§ 525) и пересѣкаетъ поверхность шара въ двухъ точкахъ, которыя называются *полюсами* круга.

* § 593. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на его сѣченіе, удовлетворяетъ пяти условіямъ: 1) *онъ проходитъ черезъ центръ шара*; 2) *перпендикуляренъ къ плоскости сѣченія*; 3) *проходитъ черезъ центръ сѣченія*; 4 и 5) *проходитъ*

черезъ тотъ и другой полюсъ этого круга. Каждые два изъ этихъ условій вполнѣ опредѣляютъ положеніе прямой линіи; поэтому всякая прямая, которая удовлетворяетъ двумъ изъ упомянутыхъ условій, удовлетворяетъ и остальнымъ. Напримѣръ: перпендикуляръ, возставленный изъ центра круга сѣченія шара, проходитъ черезъ центръ шара и оба полюса.

* § 594. Прямая, соединяющая два полюса одного и того же круга, называется *осью* круга. Изъ предъидущаго параграфа слѣдуетъ, что ось круга перпендикулярна къ его плоскости и есть діаметръ шара.

Большой кругъ, проходящій черезъ какую нибудь точку сферической поверхности и ось, называется *меридіаномъ* этой точки. Понятно, что для всякой поверхности есть одинъ только меридіанъ.

Предложеніе.

* § 595. *Всѣ точки окружности, проведенной на сферической поверхности, находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ каждаго полюса этой окружности.*

Пусть ABD означаетъ окружность какого нибудь сѣченія шара, котораго центръ въ точкѣ O; проведемъ линію POP' перпендикулярно къ упомянутому сѣченію: точки пересѣченія его C, P и P' съ кругомъ и шаромъ означаютъ центръ окружности и два ея полюса.

Фиг. 316-я.

Соединивъ полюсъ P съ какими нибудь точками A, D,.... окружности C, получимъ равныя наклонныя PA, PD,...., какъ равно-отстоящія отъ основанія C перпендикуляра CD къ плоскости круга.

§ 605. Слѣдствіе I. Дуги PA, PD... меридіановъ PAP', PDP',... равны между собой, потому что лежатъ противъ равныхъ хордъ PA, PD,... въ равныхъ кругахъ.

606. Слѣдствіе II. При разсмотрѣніи окружности большаго круга FHI, для котораго точка P есть полюсъ, найдемъ, что разстоянія PF, PH,.... отъ полюса до точекъ окружности равны между собой; а отсюда заключимъ, что и *дуги PF, PH,.... меридіановъ также равны между собою и составляютъ четверти меридіановъ*; и дѣйствительно, напр. дуга PAF со-

отвѣтствуетъ углу POF, который равенъ прямому углу, потому что ось PP' перпендикулярна къ плоскости круга FHI, слѣд. перпендикулярна и къ прямой OF.

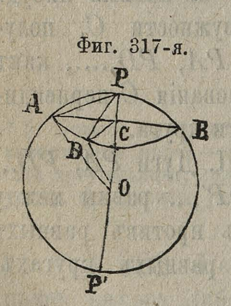
* § 596. Изложенными свойствами полюсовъ пользуются для проведенія дугъ окружностей на сферической поверхности. Съ этою цѣлью употребляютъ особый циркуль, *кронциркуль*: его ножки сдѣланы на столько выпуклыми, чтобы выпуклость шара позволяла поставить одновременно концы обѣихъ ножекъ на сферической поверхности.

Предложеніе.

* § 597. *Если поставить одну ножку кронциркуля въ какой нибудь точкѣ шаровой поверхности и обращать его такъ, чтобы другая ножка оставила слѣдъ на поверхности шара, то этотъ слѣдъ представитъ окружность, которой полюсомъ будетъ неподвижный конецъ циркуля.*

Положимъ, что ножка циркуля поставлена въ точку P шаровой поверхности, которой центръ есть точка O, и пусть другая ножка циркуля описала на сферической поверхности кривую ADB. Докажемъ, что эта кривая есть окружность, для которой точка P есть полюсъ. Соединимъ центръ O шара и точку P съ какими нибудь точками A, D,.... кривой ADB; прямыя PA, PD,.... равны между собою, потому что представляютъ разстояніе между концами ножекъ циркуля; прямыя OA, OD,.... равны между собою, какъ радіусы шара; притомъ для треугольниковъ APO, DPO,.... бокъ PO общій; слѣд. треугольники эти равны между собой; поэтому перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ A, D,... на общее основаніе PO, пересѣкутся въ одной точкѣ C; всѣ эти перпендикуляры лежатъ въ одной плоскости (§ 378), перпендикулярной къ прямой PP'. Поэтому всѣ точки кривой ADB лежатъ въ одной плоскости, притомъ онѣ равно удалены отъ точки C той же плоскости; потому что изъ равенства треугольниковъ APO, DPO,... заключаемъ о равенствѣ высотъ AC, DC,... треугольниковъ; и такъ кривая ADB есть окружность, полюсъ которой находится въ точкѣ P.

Фиг. 317-я.



*§ 598. Чтобы описать на сферической поверхности окружность большаго круга изъ данной точки, принимаемой за полюсъ, надо растворить кронциркуль такъ, чтобы разстояніе между концами ножекъ равнялось *хордѣ* четверти окружности большаго круга. Если это разстояніе неизвѣстно, то его опредѣляютъ, для чего необходимо на передъ найти радіусъ шара.

Вопросъ.

*§ 599. *Найти радіусъ шара.*

Изъ какой нибудь точки P шаровой поверхности, какъ полюса, произвольнымъ раствореніемъ кронциркуля, опишемъ на шарѣ окружность ABD; означимъ на ней произвольныя три точки A, B, D. Построимъ отдѣльно треугольникъ, котораго стороны равнялись бы разстояніямъ AB, AD и BD; радіусъ круга, описаннаго около этого треугольника, будетъ равенъ радіусу AC круга ABD.

Фиг. 318-я.

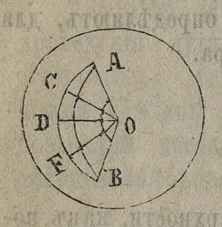
Вообразимъ, что проведены діаметръ PCP' шара и прямыя AP и AP'. По извѣстнымъ ипотенузѣ AP и катету AC построимъ отдѣльно треугольникъ apc, равный треугольнику APC; изъ точки a возставимъ перпендикуляръ ap' къ ap до пересѣченія съ продолженною pc; понятно, что треугольникъ app' будетъ равенъ треугольнику APP'; слѣдоват. pp' равна діаметру PP'. Раздѣливъ pp' пополамъ, получимъ искомый радіусъ шара.

Предложеніе.

*§ 600. *Кратчайшее разстояніе на сферической поверхности между двумя точками есть дуга большаго круга, заключающаяся между этими точками* (фиг. 319).

Возьмемъ двѣ какія нибудь точки A и B на сферической поверхности, которой центръ въ точкѣ O. Черезъ точки A, B и O проведемъ дугу AB большаго круга; между тѣми же точками A и B проведемъ по шаровой поверхности какую нибудь кривую $ACDFB$; докажемъ, что дуг. $AB <$ дуг. $ACDFB$;

отсюда заключимъ, что дуга AB есть кратчайшее разстоянiе между A и B, потому что кривая $ACDFB$ взята произвольно, лишь бы она находилась на шаровой поверхности.



Фиг. 319-я.

На этой кривой вообразимъ точки C, D, F столь близкими, что бы каждую дугу AC, CD, DF и FB можно было принять за дугу большаго круга шара O. Соединивъ центръ O съ точками A, C, D, F и B, получимъ при вершинѣ O многогранный уголъ; плоскiе его углы AOB, AOC,... измѣряются соотвѣтственно дугами AB, AC,... Плоскiй уголъ AOB меньше суммы остальныхъ плоскихъ угловъ (§ 433); слѣд.

$$\text{дуг.}\, AB < \text{дуг.}\, AC + \text{дуг.}\, CD + \text{дуг.}\, DF + \text{дуг.}\, FB,$$

т. е. $\text{дуг.}\, AB < \text{дуг.}\, ACDFB$.

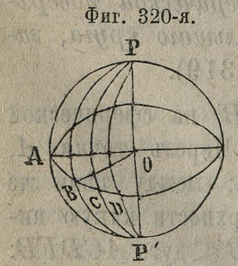
*§ 601. *Угломъ двухъ дугъ большихъ круговъ* называется двугранный уголъ, образуемый плоскостями этихъ круговъ; точки пересѣченiя этихъ дугъ называются вершинами угла.

*§ 602. *Сферическимъ двусторонникомъ* называется часть поверхности шара, заключающаяся между двумя дугами большихъ круговъ; углы, образуемые этими дугами, называются *углами двусторонника*.

Предложенiе.

*§ 603. *Поверхности сферическихъ двусторонниковъ пропорцiональны соотвѣтственнымъ ихъ угламъ.*

Возьмемъ сферическiй двусторонникъ, образуемый гранями двуграннаго угла $APP'B$. Имѣя въ виду условiя пропорцiональности (§ 336), замѣтимъ во 1-хъ), что съ увеличенiемъ двуграннаго угла $APP'B$ увеличивается поверхность сферическаго двусторонника,—это очевидно. Во 2-хъ) если построимъ послѣдовательно двугранные углы $BPP'C$ и $CPP'D$, равные двугранному углу $APP'B$, то получимъ уголъ $APP'D$ втрое большiй угла $APP'B$; но и поверхность двусторонника, соотвѣтствующая первому изъ этихъ угловъ, будетъ также втрое больше поверхности двусторонника, соотвѣтствующаго углу $APP'B$;

Фиг. 320-я.


и дѣйствительно, если совмѣстить три равные двугранные угла, то вмѣстѣ съ тѣмъ совмѣстятся и соотвѣтственныя имъ поверхности двусторонниковъ. И такъ предложеніе доказано.

* § 604. Слѣдствіе. *Поверхность сферическаго двусторонника равна четверти шаровой поверхности, умноженной на уголъ двусторонника, принимая прямой уголъ за единицу.*

Пусть F и A означаютъ послѣдовательно поверхность и уголъ сферическаго двусторонника, S — шаровую поверхность. На основаніи предъидущаго предложенія, имѣемъ $F:S=A:4d$, гдѣ d означаетъ прямой уголъ. Отсюда

$$F=S\cdot\frac{A}{4}d, \text{ а при } d=1,\ F=\frac{S}{4}\cdot A.$$

* § 605. *Сферическимъ треугольникомъ* называется часть шаровой поверхности, ограниченная тремя дугами большихъ круговъ взаимно пересѣкающихся. Эти дуги называются *сторонами* или *боками* треугольника, а углы, образуемые сторонами называются *углами* треугольника; точки пересѣченія каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ сторонъ называются вершинами треугольника.

Обыкновенно разсматриваются только такіе сферическіе треугольники, которыхъ стороны меньше полуокружности.

* § 606. Плоскости большихъ круговъ, проходящія черезъ стороны сферическаго треугольника, образуютъ при центрѣ шара трегранный уголъ, котораго плоскіе углы измѣряются сторонами сферическаго треугольника (§ 223), а двугранные углы—углами этого треугольника (§ 601). Поэтому предложенія, выражающія свойства плоскихъ и двугранныхъ угловъ трегранпаго угла, вполнѣ примѣняются и къ сферическимъ треугольникамъ; стоитъ только въ этихъ предложеніяхъ замѣнить плоскіе углы сторонами треугольника, а двугранные углы — углами сферическихъ треугольниковъ. Перечислимъ эти предложенія.

1) *Въ сферическомъ треугольникѣ каждая сторона меньше суммы остальныхъ двухъ сторонъ* (§ 433).

2) *Сумма сторонъ сферическаго треугольника меньше окружности большаго круга* (§ 434).

3) *Сумма угловъ сферическаго треугольника больше двухъ и меньше шести прямыхъ угловъ* (441).

Предложеніе.

§ 607. *Два сферическіе треугольника одного шара или двухъ равныхъ шаровъ равны между собою при слѣдующихъ условіяхъ, при одинаковомъ расположеніи ихъ частей.*

1) *Когда сторона и при ней углы одного треугольника равны, порознь, сторонѣ и прилежащимъ къ ней угламъ другого* (435).

2) *Когда двѣ стороны и уголъ между ними одного треугольника, порознь, равны двумъ сторонамъ и углу между ними въ другомъ треугольникѣ* (§ 436).

3) *Когда стороны одного изъ нихъ, порознь, равны сторонамъ другого* (§ 437).

4) *Когда углы одного, порознь, равны угламъ другого* (§ 442).

И дѣйствительно, во всѣхъ упомянутыхъ случаяхъ трегранные углы, соотвѣтствующіе даннымъ треугольникамъ, совмѣщаются; а потому и треугольники совмѣщаются, такъ какъ, по условію, они находятся на поверхности одного шара или равныхъ шаровъ и одинаково расположены.

ОТДѢЛЪ ДЕСЯТЫЙ.

ПРЕДЛОЖЕНІЯ И ВОПРОСЫ

ДЛЯ УПРАЖНЕНІЙ.

НА ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Численныя задачи.

1. Двѣ прямыя пересѣкаются: одинъ изъ угловъ равенъ $^4/_3$ прямаго угла; вычислить остальные три угла.

2. Двѣ параллельныя линіи пересѣчены сѣкущею: одинъ изъ внѣшнихъ угловъ равенъ 0,35 прямаго; найти остальные семь угловъ.

3. Двѣ непараллельныя линіи пересѣчены сѣкущей; при чемъ внѣшній уголъ, на бокѣ котораго лежитъ точка пересѣченія, равенъ 0,7 прямаго, а соотвѣтственный ему уголъ равенъ 0,64 прямаго; вычислить остальные шесть угловъ.

4. Данъ уголъ $^2/_5$ прямаго; къ его бокамъ проведены параллельныя линіи. Вычислить четыре угла, образуемые этими линіями.

5. Двѣ прямыя пересѣчены сѣкущею; при чемъ одинъ изъ внутреннихъ угловъ равенъ $^6/_5$ прямаго, а другой, по ту же сторону сѣкущей, равенъ 0,8 прямаго. По этимъ даннымъ опредѣлить, будутъ ли двѣ данныя прямыя параллельны между собою или онѣ пересѣкутся?

Предложенія.

1. Если раздѣлить пополамъ каждый изъ двухъ смежныхъ угловъ, то эти равнодѣлящія будутъ взаимно-перпендикулярны.

2. Прямая, дѣлящая пополамъ какой нибудь уголъ, раздѣлитъ также пополамъ и уголъ противоположный ему.

3. Если AOB прямая линія и уголъ $AOD = BOC$, то линія DOC необходимо прямая линія (фиг. 4).

4. Всякая точка равнодѣлящей уголъ пополамъ, равно отстоитъ отъ боковъ этого угла.

5. Если между двумя точками проведены двѣ ломанныя линіи, и каждая состоитъ изъ двухъ прямыхъ, то наружная ломанная больше внутренней.

6. Равнодѣлящія внутренніе противоположные углы, при двухъ параллельныхъ линіяхъ, параллельны между собою.

Вопросы.

1. На прямой линіи найти точку, равно-отстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ.

2. Черезъ данную точку провести прямую, одинаково-отстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ.

3. Даны двѣ точки A и B по одну сторону прямой CD; найти такую точку O на прямой CD, чтобы ломанная AOB была меньше всѣхъ другихъ ломанныхъ, проходящихъ отъ A до B черезъ точки прямой CD.

4. Между боками угла провесть прямую данной длины и параллельную данному направленію.

5. На бокѣ угла найти такую точку, чтобы перпендикуляръ, проведенный изъ нея на другой бокъ, равнялся напередъ заданной прямой.

6. Даны двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи. Черезъ данную точку провесть сѣкущую такъ, чтобы она отрѣзала на данныхъ прямыхъ равныя части отъ вершины.

7. Черезъ данную точку провести прямую, которая съ боками даннаго угла составила бы равные углы.

НА ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Предложенія.

1. Если отъ вершины угла BAC отложимъ по боку AB произвольныя разстоянія AM и AN, а по другому боку отложимъ $AM' = AM$ и $AN' = AN$, то точка пересѣченія O прямыхъ MN' и $M'N$ лежитъ на прямой (равнодѣлящей), дѣлящей пополамъ уголъ BAC.

(Докажите равенство треугольниковъ ANM' и AMN', а потомъ равенство треугольниковъ AMO и $AM'O$).

2. Перпендикуляры, опущенные изъ концовъ основанія равнобедреннаго треугольника на противолежащія стороны, равны между собою.

(Сравните треугольники, составленные изъ перпендикуляровъ и основанія даннаго треугольника).

3. Прямыя, проведенныя черезъ какую нибудь точку равнодѣлящей данный уголъ, параллельно бокамъ этого угла, составляютъ съ боками самаго угла — ромбъ.

(Докажите, что треугольникъ, составленный изъ равнодѣлящей, прямой, параллельной одному боку, и отрѣзка другаго бока, — равнобедренный).

4. Перпендикуляры, возставленные къ бокамъ треугольника изъ ихъ рединъ, пересѣкаются къ одной точкѣ.

(Изъ срединъ двухъ боковъ возставьте къ нимъ перпендикуляры, а изъ точки пересѣченія опустите перпендикуляръ на третій бокъ и докажите, что онъ пойдетъ черезъ его середину).

5. Прямыя, проведенныя черезъ вершины треугольника параллельно противолежащимъ бокамъ, образуютъ треугольникъ, котораго бока вдвое больше боковъ даннаго треугольника.

(Имѣйте въ виду, что въ параллелограммѣ противолежащіе бока равны между собою).

6. Три высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ.

(Черезъ вершины даннаго треугольника проведите параллельныя противолежащимъ бокамъ и имѣйте въ виду предложеніе 4-е).

7. Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки основанія равнобедреннаго треугольника на противулежащіе бока, равна перпендикуляру, опущенному изъ одного конца основанія на противулежащій бокъ.

(Проведите черезъ данную точку основанія параллельную къ одному изъ равныхъ боковъ; такимъ образомъ на перпендикулярѣ, который долженъ составить сумму, отрѣжется одинъ изъ перпендикуляровъ, долженствующій быть слагаемымъ; а, на основаніи предложенія 2-го, заключите о равенствѣ другого отрѣзка и втораго перпендикуляра).

8. Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки, взятой внутри правильнаго треугольника, на бока, равна высотѣ этого треугольника.

(Черезъ данную точку проведите параллельную основанію треугольника; получите равнобедренный треугольникъ, къ которому примѣните предъидущее предложеніе. Изъ равенства треугольниковъ найдется, что перпендикуляръ этого равнобедреннаго треугольника, проведенный изъ конца основанія на противулежащій бокъ, равенъ высотѣ этого треугольника, и проч.).

9. Прямыя, проведенныя черезъ произвольную точку основанія равнобедреннаго треугольника параллельно остальнымъ двумъ бокамъ, образуютъ параллелограммъ съ постояннымъ периметромъ.

10. Хорда треугольника, проведенная черезъ середину его высоты параллельно основанію, раздѣлитъ другіе два бока пополамъ и равна половинѣ основанія.

11. Хорда треугольника параллельна основанію, если она соединяетъ середины остальныхъ двухъ боковъ или середины высоты и одного бока.

12. Хорда треугольника, проведенная параллельно одному изъ его боковъ черезъ точку, дѣлящую другой бокъ на равныя части, раздѣлитъ третій бокъ на равныя части; обратное.

13. Найти мѣсто точекъ серединъ прямыхъ, идущихъ отъ данной точки къ различнымъ точкамъ данной прямой.

14. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое болѣе другого, то ипотенуза вдвое болѣе меньшаго катета; обратное.

15. Если на бокахъ квадрата отложить отъ вершинъ, въ одномъ направленіи, равныя части, то полученныя точки составятъ вершины новаго квадрата.

16. Всякая хорда параллелограмма, проходящая черезъ точку пересѣченія діагоналей, въ этой точкѣ дѣлится пополамъ, и она раздѣляетъ параллелограммъ на два равномѣрные четверосторонника.

17. Равнодѣлящія двухъ внѣшнихъ угловъ, происшедшихъ отъ продолженія двухъ смежныхъ боковъ какого нибудь многоугольника, въ одномъ направленіи, образуютъ углы, изъ которыхъ одинъ равенъ полусуммѣ этихъ внѣшнихъ угловъ, а другой — полусуммѣ угловъ многоугольника, черезъ вершины которыхъ проходятъ равнодѣлящія.

18. Четвероугольникъ будетъ параллелограммъ, если его противоположные углы попарно равны между собою.

19. Діагонали параллелограмма не равны между собою.

20. Если діагонали четвероугольника взаимно дѣлятся пополамъ, то такой четвероугольникъ — параллелограммъ.

21. Равнодѣлящая уголъ параллелограмма, а также прямоугольника не совпадаетъ съ діагональю.

22. Равнодѣлящія смежные углы параллелограмма взаимноперпендикулярны.

23. Во всякомъ параллелограммѣ, равнодѣлящія его углы образуютъ прямоугольникъ, котораго противоположныя вершины лежатъ на прямыхъ, параллельныхъ сторонамъ параллелограмма; а діагонали, порознь, равны разности смежныхъ боковъ параллелограмма.

24. Прямыя, соединяющія послѣдовательно середины боковъ четверосторонника, образуютъ параллелограммъ.

25. Равнодѣлящія углы какого нибудь четыреугольника составляютъ четыреугольникъ, въ которомъ противолежащіе углы взаимно-дополнительны до двухъ прямыхъ.

26. Въ *равнобочной* трапеціи (такъ называется трапеція, въ которой непараллельные бока равны между собою) каждое основаніе составляетъ равные углы съ непараллельными боками.

Вопросы.

1. Черезъ точку, данную внутри угла, провести прямую до пересѣченія съ боками угла такъ, чтобы данная точка составляла середину этой прямой.

2. Найти такую точку внутри треугольника, чтобы хорда, проведенная черезъ нее параллельно основанію треугольника, отрѣзала на остальныхъ бокахъ такія части, прилежащія къ этому основанію, которыхъ сумма была бы равна упомянутой хордѣ.

(Искомая точка есть пересѣченіе равнодѣлящихъ углы при основаніи треугольника).

3. Черезъ точку, данную внутри угла, котораго вершина не помѣщается на бумагѣ, провесть прямую, которой продолженіе прошло бы черезъ эту вершину.

(Имѣйте въ виду, что высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ).

4. Провести хорду треугольника, параллельную основанію и равную данной прямой.

5. Найти уголъ правильнаго треугольника.

6. Найти углы при основаніи равнобедреннаго треугольника, когда уголъ при вершинѣ равенъ $^3/_5$ прямаго угла.

7. Найти суммы угловъ выпуклыхъ многоугольниковъ о пяти, шести и семи бокахъ.

8. Вычислить внѣшній уголъ правильнаго треугольника.

9. Уголъ параллелограмма равенъ 0,37 прямаго; найти остальные углы.

10. Периметръ параллелограмма равенъ 140,65 фута, а разность двухъ смежныхъ боковъ равна 12,4; вычислить бока этого параллелограмма.

11. Основанія трапеціи извѣстны, одно 13 ф. + 74 дюйма, другое 18 арш. — $4^1/_2$ вершка. Найти длину прямой, соединяющей середины непараллельныхъ боковъ.

12. Половина діагонали прямоугольника равна 13,63 дюйм.; найти другую діагональ.

НА ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Предложенія.

1. Въ четвероугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, противоположные углы взаимно-дополнительны до двухъ прямыхъ.

2. Четвероугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругѣ, если сумма его противоположныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

(Черезъ три вершины проведите окружность; положите, что она не проходитъ черезъ четвертую вершину; основываясь на предъидущей теоремѣ, получится нелѣпый выводъ).

3. Сумма противолежащихъ боковъ четвероугольника, описаннаго около круга, равна суммѣ остальныхъ двухъ боковъ.

4. *Равнобочная* трапеція (такъ называется трапеція, въ которой непараллельные бока равны между собою) можетъ быть вписана въ кругѣ.

5. Діагонали трапеціи, вписанной въ кругѣ, пересѣкаются на діаметрѣ, проходящемъ черезъ точку пересѣченія непараллельныхъ боковъ. Этотъ діаметръ перпендикуляренъ къ основаніямъ трапеціи.

(Имѣя въ виду, что углы при основаніяхъ равнобочной трапеціи равны между собою, докажите, что точка пересѣченія діагоналей, а также пересѣченіе непараллельныхъ боковъ находятся

въ равныхъ разстояніяхъ отъ концовъ одного изъ основаній трапеціи).

6. Во всякомъ вписанномъ многоугольникѣ, четнаго числа боковъ, сумма угловъ на мѣстахъ нечетныхъ равна суммѣ угловъ на мѣстахъ четныхъ. (Разбейте многоугольникъ изъ одной вершины на четвероугольники).

7. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведутся діаметры, то линія, соединяющая ихъ концы, пройдетъ черезъ другую точку пересѣченія круговъ.

8. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей провесть прямую, параллельную линіи центровъ, то сумма хордъ, полученныхъ на этой прямой, равна удвоенному разстоянію между центрами.

9. Діаметръ окружности, вписанной въ прямоугольномъ треугольникѣ, равенъ избытку суммы катетовъ надъ ипотенузою.

10. Если черезъ точку касанія двухъ круговъ провесть двѣ сѣкущія, то хорды, соединяющія концы этихъ сѣкущихъ въ каждомъ кругѣ, параллельны между собою. (Проведите касательную черезъ точку касанія круговъ).

11. Если черезъ точку P, взятую внѣ или внутри круга, провесть сѣкущія въ произвольномъ числѣ, то середины полученныхъ такимъ образомъ хордъ будутъ лежать на окружности, которой діаметръ равенъ линіи, соединяющей точку P съ центромъ даннаго круга.

12 Для двухъ окружностей, не имѣющихъ общихъ точекъ, наибольшая и наименьшая изъ линій, соединяющихъ точки одной окружности съ точками другой, будетъ та, которая проходитъ черезъ центры.

13. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки окружности на бока вписаннаго треугольника, находятся на прямой линіи.

Вопросы.

1. Раздѣлить пополамъ уголъ, котораго вершина не помѣщается на бумагѣ.

2. Въ данномъ углѣ вписать окружность даннымъ радіусомъ.

3. Черезъ точку, данную внѣ двухъ параллельныхъ, провести прямыя такъ, чтобы части ихъ, заключающіяся между этими параллельными, были равны, каждая, данной прямой.

4. Черезъ двѣ точки, данныя на окружности, провесть двѣ параллельныя хорды, которыхъ сумма равна данной прямой.

5. Построить треугольникъ, зная его основаніе, высоту и уголъ противъ основанія.

6. Построить треугольникъ, зная основаніе, сумму остальныхъ двухъ боковъ и одинъ изъ угловъ при основаніи.

7. Построить треугольникъ, зная основаніе, разность остальныхъ двухъ боковъ и уголъ при основаніи.

8. Построить треугольникъ, зная уголъ при основаніи, высоту и периметръ.

9. Построить треугольникъ, зная основаніе, противолежащій ему уголъ и сумму остальныхъ боковъ.

10. Построить треугольникъ, зная основаніе, противолежащій ему уголъ и разность остальныхъ боковъ.

11. Построить треугольникъ, зная основаніе, уголъ при вершинѣ и кругъ вписанный въ треугольникѣ.

12. Черезъ точку данную внѣ круга, провесть сѣкущую такъ, чтобы получить хорду, равную данной длинѣ.

13. Въ данномъ кругѣ провесть хорду данной длины, которая дѣлилась бы пополамъ другою данною хордою.

14. Описать окружность, касательную къ данной окружности и данной прямой, въ назначенной на ней точкѣ.

15. Описать окружность, касательную къ данной прямой и къ окружности въ назначенной на ней точкѣ.

16. Построить треугольникъ по двумъ угламъ и периметру.

17. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и одному боку.

18. Построить трапецію по даннымъ ея бокамъ.

19. Описать окружность, которая отрѣзала бы отъ двухъ параллельныхъ линій хорды, равныя даннымъ длинамъ.

20. Даны окружность и прямая линія; найти такую точку на этой прямой, чтобы окружность, описанная изъ нея, какъ центра, радіусомъ, равнымъ данной длинѣ, была касательною къ данному кругу.

21. Описать окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки и пересѣкающую данный кругъ такъ, чтобы общая хорда была параллельна данному направленію.

22. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно-удаленныхъ отъ данной окружности.

23. Найти геометрическое мѣсто серединъ равныхъ хордъ данной окружности.

24. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія двухъ окружностей и ограниченныхъ этими окружностями найти наибольшую.

25. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которая прошла бы черезъ двѣ данныя точки.

26. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которая прошла бы черезъ данную точку, и центръ которой находился бы или на данной прямой, или на данной окружности.

27. Описать окружность, которая прошла бы черезъ двѣ данныя точки, и которой центръ находился бы на данной прямой или на данной окружности.

28. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которая прошла бы черезъ данную точку и касалась данной прямой, или окружности.

29. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которой центръ находился бы на данной прямой, и которая касалась бы или другой данной прямой, или данной окружности.

30. Описать окружность даннымъ радіусомъ, которой центръ находился бы на данной окружности, и которая касалась бы данной прямой, или данной окружности.

31. Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

32. Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ данной прямой и данной окружности.

33. Описать окружность даннымъ радіусомъ и касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ.

34. Описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ прямой въ данной на ней точкѣ.

35. Описать окружность, проходящую черезъ данную точку и касательную къ окружности въ данной на ней точкѣ.

36. Описать окружность, касательную къ двумъ даннымъ прямымъ и одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

37. Къ окружности провести касательную, составляющую данный уголъ съ данною прямою.

38. Описать окружность, касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ и притомъ одной изъ нихъ въ данной точкѣ.

39. Построить треугольникъ, зная его углы и высоту.

40. Построить прямоугольникъ, зная его сторону и діагональ.

41. Построить прямоугольникъ, зная его сторону и уголъ между діагоналями.

42. Построить ромбъ по двумъ его діагоналямъ.

43. Построить ромбъ, зная его сторону и уголъ.

44. Построить ромбъ, зная его сторону и діагональ.

45. Построить квадратъ, когда извѣстна его діагональ.

46. Уголъ, вписанный въ окружности, равенъ 0,37 прямаго; найти центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ, заключающейся между боками этого угла.

47. Найти уголъ, составленный хордою и касательною, зная центральный уголъ 0,59 прямаго, соотвѣтствующій дугѣ, заключающейся между боками перваго угла.

48. Разстояніе между центрами двухъ круговъ равно 5,4 дюйма, радіусы этихъ круговъ равны 9,2 дюйма и 6,8 дюйма. Опредѣлить положеніе круговъ, т. е. будутъ ли они пересѣкаться, касаться или не имѣютъ общихъ точекъ.

49. Радіусъ одного круга равенъ 5 вершкамъ, другаго 8 дюймамъ, а разстояніе между ихъ центрами равно 15 дюймамъ. Опредѣлить положеніе одного круга относительно другаго.

50. Опредѣлить положеніе круговъ, зная, что разстояніе между ихъ центрами равно 14,7, большій радіусъ равенъ 10,9, а меньшій — 3,8.

51. Діаметръ меньшаго круга равенъ 12,4 вершк., разстояніе между центромъ этого круга и центромъ другого большаго круга равно 1 фут. + 2,4 дюйма. Найти, какія величины можно задать для радіуса большаго круга, чтобы въ немъ заключался меньшій кругъ.

НА ОТДѢЛЫ ЧЕТВЕРТЫЙ, ПЯТЫЙ И ШЕСТОЙ.

Предложенія.

1. Треугольникъ, коего вершины суть середины боковъ даннаго треугольника, подобенъ этому послѣднему.

2. Средняя пропорціональная двухъ неравныхъ линій всегда меньше средней ариѳметической тѣхъ же линій.

3. Во всякой трапеціи середины основаній, точка встрѣчи непараллельныхъ боковъ и пересѣченіе діагоналей лежатъ на одной прямой.

4. Если черезъ какую нибудь данную точку M провесть

хорду въ окружности, то произведеніе отрѣзковъ этой хорды равно произведенію наибольшаго и наименьшаго разстояній точки *M* до окружности.

5. Линіи, соединяющія середины боковъ треугольника съ противолежащими вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

6. Во всякомъ писанномъ четверосторонникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противолежащихъ боковъ.

7. Отъ соединенія среднихъ смежныхъ боковъ всякаго четверосторонника получается параллелограммъ.

8. Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ всѣхъ боковъ *равна* суммѣ квадратовъ діагоналей.

9. Во всякомъ четвероугольникѣ сумма квадратовъ всѣхъ боковъ равна суммѣ квадратовъ діагоналей, вмѣстѣ съ учетвереннымъ квадратомъ линіи, соединяющей середины діагоналей.

Вопросы.

1. Раздѣлить треугольникъ на два равномѣрные треугольника прямою, проходящею черезъ вершину.

2. Раздѣлить треугольникъ на двѣ равномѣрныя части прямою, проходящею черезъ точку, взятую на сторонѣ даннаго треугольника.

3. Раздѣлить треугольникъ на m равномѣрныхъ треугольниковъ прямыми, проходящими черезъ вершину.

4. Раздѣлить треугольникъ на три треугольника, пропорціональные числамъ a, b и c, прямыми, проходящими черезъ вершину треугольника.

5. Построить равнобедренный треугольникъ, равномѣрный данному и имѣющій съ послѣднимъ общее основаніе и общую высоту.

6. Построить квадратъ, равномѣрный суммѣ или разности двухъ данныхъ квадратовъ.

7. На данной прямой построить прямоугольникъ, равномѣрный данному прямоугольнику.

8. Данную прямую раздѣлить на части, пропорціональныя даннымъ квадратамъ.

9. Построить квадратъ, который относился бы къ данному квадрату, какъ данныя прямыя $m:n$.

10. Построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику, зная отношеніе сходственныхъ боковъ.

11. Построить прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату, когда извѣстны: 1) сумма и 2) разность его измѣреній.

12. Описать окружность, проходящую черезъ двѣ данныя точки и касательную къ данной прямой.

13. Даны двѣ окружности; провести къ нимъ общую касательную.

14. На данной прямой построить правильные многоугольники о трехъ, шести, двѣнадцати сторонахъ.

15. На данной прямой построить правильные многоугольники о четырехъ, восьми, шестнадцати, ... сторонахъ.

16. На данной прямой построить правильный десятиугольникъ.

17. На данной прямой построить правильный пятиугольникъ.

18. На данной прямой построить уголъ въ 36^0, 72^0 и 144^0.

19. Даны два подобные треугольника; построить треугольникъ, имъ подобный и равномѣрный ихъ суммѣ или разности.

20. Даны два подобные многоугольника; построить многоугольникъ, имъ подобный и равномѣрный ихъ суммѣ или разности.

Численныя задачи.

1. Къ боку треугольника, длиною въ 4,6 дюйма проведена параллельная хорда, дѣлящая одинъ изъ остальныхъ двухъ боковъ на части, пропорціональныя числамъ 7 и 4; найти длину этой хорды и опредѣлить, какую часть она отрѣзываетъ отъ площади даннаго треугольника.

2. Два бока треугольника извѣстны, 17 дюймовъ и $11^1/_4$ дюймовъ: на третьемъ боку найти точку, по соединеніи которой съ вершиною противолежащаго угла, этотъ послѣдній раздѣлился бы пополамъ.

3. Хорда, параллельная одному изъ катетовъ, равна $17^1/_2$ дюймамъ; причемъ она дѣлитъ другой катетъ на части, пропорціональныя числамъ 2 и 3; вычислить первый катетъ.

4. Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямаго угла на ипотенузу, равна 7 дюймамъ, длина ипотенузы равна 1 фут. $+ 5^1/_2$ дюймамъ; найти отрѣзки ипотенузы.

5. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямаго угла на ипотенузу, даетъ два отрѣзка, одинъ въ 11 дюймовъ, дру-

гой въ 4 дюйма. Вычислить оба катета этого треугольника, съ точностью до 0,1 дюйма.

6. Радіусъ круга равенъ 9 дюймамъ; найти длину хорды, перпендикулярной къ діаметру и отстоящей отъ центра на 2,4 дюйма.

7. Длина хорды равна 3 вершк., изъ середины ея возставленъ къ ней перпендикуляръ, отрѣзокъ его между хордою и дугою равенъ 4,7 вершка; найти діаметръ.

8. Въ кругѣ пересѣкаются двѣ хорды, отрѣзки одной суть 7 дюймовъ и 3 дюйма, а одинъ изъ отрѣзковъ другой хорды равенъ 9 дюймамъ; найти другой отрѣзокъ этой хорды.

9. Найти хорду круга, отстоящую отъ центра на 6 дюймовъ, когда радіусъ этого круга равенъ 11,7 дюйма.

10. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная длиною въ 7 вершковъ и сѣкущая, которой часть, заключающаяся въ кругѣ, равна 5 вершкамъ; найти длину сѣкущей и внѣшняго ея отрѣзка.

11. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная длиною въ 7 вершковъ. Найти разстоянія этой точки до окружности, когда радіусъ круга равенъ 4 дюймамъ.

12. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена касательная; длина касательной равна 12 вершкамъ; наибольшее разстояніе отъ точки и до окружности равно 18 вершк.; найти діаметръ окружности и наименьшее разстояніе до нея.

13. Въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ ипотенуза равна 6 дюймамъ; найти катеты.

14. Ипотенуза треугольника равна 4,1 дюйма, одинъ изъ катетовъ равенъ $^5/_7$ дюйма; найти другой катетъ.

15 Большій отрѣзокъ прямой, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, равенъ 10; найти длину прямой.

16. Извѣстны основаніе 12 и высота 4 въ прямоугольникѣ; найти діагональ этого прямоугольника.

17. Извѣстны бока четвероугольника, именно 17, 15, 10, 4 дюйма; найти бока подобнаго ему многоугольника, когда извѣстенъ его периметръ 9,4 дюйма.

18. Общая хорда двухъ пересѣкающихся круговъ равна 4 дюймамъ, радіусъ одного круга равенъ 7 дюймамъ, радіусъ другаго круга—3 дюймамъ; найти разстояніе между центрами.

19. Площадь треугольника равна 1 квадр. футу, основаніе его равно 9 дюймамъ; найти высоту этого треугольника.

20. Вычислить площадь трапеціи, которой большее основаніе равно 4 дюймамъ, меньшее — $2^1/_4$ дюймамъ, а высота — 5 дюймамъ.

21. Отношеніе основанія прямоугольника къ его высотѣ равно $^7/_3$, площадь прямоугольника равна одной десятинѣ. Найти основаніе и высоту прямоугольника.

22. Два треугольника подобны; сторона одного равна 14,7 вершк., другого—сходственная первой—7,9 дюйма. Найти, во сколько разъ площадь одного треугольника меньше площади другаго треугольника.

23. Два многоугольника подобны, сторона одного въ 3 раза меньше сходственной ей стороны въ другомъ; во сколько разъ периметръ и площадь перваго многоугольника меньше периметра и площади другого многоугольника.

24. Вычислить площадь правильнаго треугольника, зная его сторону.

25. Вычислить площадь правильнаго шестиугольника въ зависимости отъ его стороны. Тоже и для правильнаго двѣнадцатиугольника.

26. Вычислить площадь правильнаго восьмиугольника въ зависимости его стороны.

27. Вычислить площадь правильнаго десятиугольника въ зависимости его стороны.

28. По данной площади правильнаго многоугольника о 3, 6, 12, 8 и 10 сторонахъ найти бокъ каждаго изъ нихъ.

29. Стороны двухъ правильныхъ треугольниковъ равны 21,4 ф. и 14,3 ф. Вычислить бокъ третьяго правильнаго треугольника, равномѣрнаго суммѣ двухъ данныхъ, не отыскивая ихъ площадей.

30. Рѣшить тотъ же вопросъ для правильныхъ шестиугольниковъ.

31. Радіусы двухъ круговъ извѣстны, 17 вершк. и 4 вершка. Узнать, во сколько разъ окружность и площадь перваго круга больше окружности и площади другаго круга.

32. Найти величину градуса окружности, которой діаметръ=2 дюймамъ.

33. Центральный уголъ равенъ $23^\circ\ 15'$, радіусъ равенъ 1 вершку; найти площадь сектора.

34. Между боками угла описаны дуги, принимая вершину

за центръ, а за радіусы длины 7,4 вершка и 3,5 вершка; узнать, во сколько разъ одна дуга больше другой.

35. Бокъ квадрата, описаннаго около круга, равенъ 4,1 дюйма; найти длину окружности.

36. Бокъ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равенъ 7 вершкамъ; вычислить площадь круга.

37. Бокъ треугольника, вписаннаго въ кругѣ, равенъ 6 вершкамъ. Вычислить длину окружности и площадь круга.

38. Площадь шестисторонника, вписаннаго въ кругѣ, равна 12,4 кв. дюймамъ. Узнать разность между площадью этого круга и площадью многоугольника.

39. Радіусъ круга равенъ 3 дюймамъ; во сколько разъ надобно увеличить этотъ радіусъ, чтобы площадь круга увеличилась въ 225 разъ.

40. Найти окружность круга, если бокъ вписаннаго въ немъ правильнаго десятиугольника равенъ $4\frac{1}{2}$ дюймамъ.

41. Площадь круга равна 345,64 кв. дюймамъ; найти центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ длиною въ 3 дюйма.

42. Окружности двухъ круговъ пропорціональны числамъ 8 и 4; по извѣстной площади большаго круга, 1000 кв. дюймовъ, найти площадь другого круга.

43. Радіусы двухъ подобныхъ секторовъ пропорціональны числамъ $1\frac{1}{2}$ и 4,2; зная площадь меньшаго сектора 46 кв. дюймовъ, найти площадь большаго сектора.

44. Дугѣ $75^\circ\ 25'\ 40''$ соотвѣтствуетъ секторъ, котораго площадь равна 100 кв. дюймамъ; найти площадь сектора того же круга при дугѣ въ 100°.

45. Сравнивая площади двухъ правильныхъ полигоновъ одинаковаго числа боковъ, нашли, что одна площадь втрое больше другой; узнать, во сколько разъ бокъ перваго полигона больше бока втораго полигона.

46. Два правильные полигона подобны, площадь одного изъ нихъ составляетъ половину другой площади; узнать, какую часть составляетъ діаметръ круга, описаннаго около перваго полигона, отъ діаметра круга, описаннаго около втораго полигона.

47. Вычислить бокъ правильнаго треугольника, описаннаго около круга, котораго діаметръ равенъ 5 футамъ.

48. Вычислить бокъ правильнаго многоугольника, описаннаго около круга, зная, что бокъ правильнаго вписаннаго треугольника равенъ 3 арш. $+ 15\frac{1}{5}$ вершкамъ.

49. Вычислить число градусовъ, заключающихся въ дугѣ, которой длина равна радіусу.

50. Вычислить число градусовъ дуги, которой длина равна 17 дюймовъ, при радіусѣ 12 дюймовъ.

51. Найти радіусъ такого круга, въ которомъ дуга въ 14° 12′ была бы равна 18 дюймамъ.

52. Радіусъ одного круга 10 ф., другого 2 арш.+9 верш. и третьяго $14\frac{1}{2}$ ф. Вычислить радіусъ четвертаго круга, равномѣрнаго суммѣ трехъ данныхъ, не вычисляя площадей.

53. Радіусы концентрическихъ круговъ равны 10-ти и 6-ти фут. Вычислить площадь кольца между данными окружностями.

54. Радіусы двухъ концентрическихъ круговъ разнятся на 2 ф., а площадь кольца, образуемаго ими, равна 4 квад. саж. Вычислить радіусы.

55. Площадь круга и площадь вписаннаго въ немъ правильнаго треугольника составляютъ вмѣстѣ 15 кв. ф. Вычислить площади круга и треугольника.

56. Вычислить площадь сегмента, заключающуюся между дугою въ 60° и ея хордою, зная, что сегментъ принадлежитъ кругу, котораго радіусъ равенъ 3 сажнямъ.

НА ОТДѢЛЫ ВОСЬМОЙ И ДЕВЯТЫЙ.

Численныя задачи.

1. Вычислить поверхность правильной шестисторонней пирамиды, зная, что бокъ основанія равенъ 3 дюймамъ, а боковое ребро равно 10 дюймамъ.

2. Полная поверхность прямоугольнаго параллелипипеда равна 35 кв. дюймамъ; изъ трехъ реберъ, составляющихъ трегранный уголъ, одно равно 2 дюймамъ, а другое вдвое больше третьяго. Найти площадь каждой грани.

3. Полная поверхность прямоугольнаго параллелипипеда равна 142 кв. дюймамъ, а высота его равна 7 дюймамъ; вычислить площадь основанія, зная, что одинъ бокъ его вдвое больше другаго.

4. Объемъ прямоугольнаго параллелипипеда равенъ 376 кубичнымъ дюймамъ; его три смежныя ребра пропорціональны числамъ 2, 3, 4. Вычислить поверхность этого параллелипипеда.

5. Найти ребро куба, равномѣрнаго суммѣ трехъ кубовъ, которыхъ ребра послѣдовательно равны 1, 2 и 3-мъ дюймамъ.

6. Въ кругѣ, котораго діаметръ равенъ 12-ти дюймамъ, вписанъ равносторонній треугольникъ. Найти объемъ пирамиды, которой основаніе равно этому треугольнику, а высота равна 1 футу.

7. Высота пирамиды равна 1 арш.$+$2 дюйма, а основаніе ея—квадратъ, котораго бокъ равенъ 2 футамъ; вычислить объемъ этой пирамиды.

8. Дана пирамида, которой вершина находится въ точкѣ S, а основаніе есть многоугольникъ $ABCD\ldots$; пирамида эта разсѣчена плоскостью $abcd\ldots$ параллельно основанію, причемъ пирамида $Sabcd\ldots$ составляетъ двѣнадцатую часть всей пирамиды. Узнать, какую часть ребро Sa составляетъ отъ ребра SA, съ точностью до 0,1.

9. Извѣстны объемъ цилиндра и его боковая поверхность; найти основаніе и высоту цилиндра.

10. Высота цилиндра равна 9 дюймамъ; вычислить радіусъ основанія съ точностью до $^1/_{10}$, зная, что полная поверхность этого цилиндра равна 1 квадр. аршину.

11. Отъ обращенія прямоугольника около его основанія получился цилиндръ, котораго объемъ равенъ 5-ти куб. дюймамъ; а отъ обращенія того же прямоугольника около другаго бока, получился объемъ въ 2 куб. вершка. Найти отношеніе основанія къ высотѣ прямоугольника.

12. Объемъ прямаго конуса равенъ 1 куб. сажени, радіусъ основанія—2 аршина; найти коническую поверхность (боковую), съ точностью до $^1/_{100}$.

13. По извѣстнымъ радіусамъ 10 футъ и 6 футъ основаній усѣченнаго конуса, найти радіусъ основанія цилиндра, равномѣрнаго этому усѣченному конусу, когда у обоихъ тѣлъ одна высота.

14. Объемъ усѣченнаго конуса равенъ 5,7 куб. футамъ, высота его—2,4 фута, діаметръ нижняго основанія 1,5 фута; вычислить до $^1/_{100}$ діаметръ верхняго основанія.

15. Прямой конусъ, котораго высота равна 9 футамъ, а радіусъ основанія 5 футамъ, разсѣченъ плоскостью параллельно основанію на разстояніи одного фута отъ вершины. Вычислить объемъ и боковую поверхность усѣченнаго конуса съ точностью до $\frac{1}{100}$.

16. Производящая конуса равна 10 футамъ, площадь основанія равна 4 кв. фут. Вычислить площадь круговаго сѣченія, отстоящаго на 1,4 фута отъ основанія.

17. Объемъ конуса равенъ 300 куб. дюйм., высота его равна 5 дюйм. На какомъ разстояніи отъ вершины должно провести плоскость, перпендикулярную къ оси, чтобы отсѣченный конусъ содержалъ 45 кубическихъ дюймовъ.

18. Большой кругъ шара принятъ за основаніе цилиндра; найти отношеніе высоты этого цилиндра къ радіусу шара съ тѣмъ, чтобы боковая поверхность цилиндра составляла $^7/_8$ частей половины шаровой поверхности.

19. Вычислить земной радіусъ въ метрахъ, съ точностью до 1 метра.

20. Высота шароваго сегмента объ одномъ основаніи равна 0,42 дюйма, радіусъ этого основанія $=$ 1,2 дюйма. Вычислить сегментную поверхность.

21. Вычислить высоту шароваго сегмента, поверхность котораго равномѣрна большому кругу шара.

22. Радіусъ шара $=$ 2 дюймамъ, сегментная высота $=$ 1,2 дюйма. Найти радіусъ круга, равномѣрнаго сегментной поверхности.

23. Радіусъ шара равенъ 10 дюймамъ; вычислить поверхность шароваго пояса, а также и основанія его, которыя проведены по одну сторону центра шара въ разстояніяхъ отъ него 4 и 5-ти дюймовъ.

24. Извѣстенъ радіусъ шара; желаютъ построить конусъ, равномѣрный этому шару, притомъ такой, чтобы высота его составляла половину радіуса шара. Найти радіусъ основанія.

25. Извѣстна сегментная поверхность 4 кв. дюйма и высота ея 0,7 дюйма. Вычислить объемъ шара.

26. Мѣры вѣса въ зависимости отъ единицъ длины у насъ опредѣлены, по Высочайшему указу 1835 года 11 Октября, такимъ условіемъ: что кубическій дюймъ воды вѣситъ 368,361 долю; а *ведро* опредѣлено вѣсомъ воды въ 30 фунтовъ; *четверикъ*—вѣсомъ воды въ 64 фунта *). Опредѣлить объемы ведра и четверика.

27. Если четверикъ имѣетъ форму равнобочнаго цилиндра

*) Числа эти надобно имѣть въ виду при рѣшеніи послѣдующихъ задачъ.

(высота = діаметру основанія), то какъ велика высота этого цилиндра.

28. Если гарнецъ имѣетъ форму цилиндра, котораго высота равна $^1/_4$ аршина, то какъ великъ діаметръ основанія.

29. Опредѣлить ребро куба, котораго объемъ равенъ гарнцу.

30. Ведро имѣетъ форму цилиндра, котораго высота равна $10^1/_4$ дюйма; вычислить діаметръ основанія съ точностью до $^1/_{10}$ дюйма.

31. Вычислить съ точностью до $^1/_{10}$ дюйма ребро чугуннаго куба, вѣсомъ въ 1 фунтъ, когда извѣстно, что удѣльный вѣсъ чугуна равенъ 7-ми (т. е. при равныхъ объемахъ чугуна и воды, вѣсъ перваго въ 7 разъ больше вѣса воды).

32. Вычислить, вѣрно до $^1/_{10}$, діаметръ чугуннаго шара вѣсомъ въ 1 фунтъ, когда удѣльный вѣсъ чугуна равенъ 7-ми.

33. Опредѣлить количество ведеръ воды, вмѣщающейся въ чанѣ, котораго высота = 2 арш., діаметръ нижняго основанія = $1^1/_4$ арш., діаметръ верхняго основанія = $1^1/_2$ аршина.

34. Сколько бочекъ воды вмѣщается въ колодцѣ, котораго основаніе равно 4 квадр. аршинамъ, а глубина воды — одна сажень.

35. Въ примѣръ дѣлимости тѣлъ приводятъ, что червонецъ можно вытянуть въ листъ, котораго площадь равна 2000 квадр. дюймамъ. Вычислить толстоту листа, полагая, что червонецъ вѣситъ 1 золотникъ 12 долей, а удѣльный вѣсъ золота равенъ 19-ти.

36. Вычислить діаметръ платиновой проволоки, длиною въ 300 саженъ, а вѣсомъ въ одинъ золотникъ. Извѣстно, что удѣльный вѣсъ платины равенъ 22.

37. Высота Александровской колонны въ С.-Петербургѣ (цилиндрической формы) равна 84 футамъ, діаметръ ея 14 футовъ, удѣльный вѣсъ гранита равенъ 2,716. Вычислить вѣсъ этой колонны.

38. Опредѣлить поверхность жаркаго пояса, зная, что тропики имѣютъ географическую широту 23°27′30″, а градусъ экватора равенъ 104,3388 . . . версты.

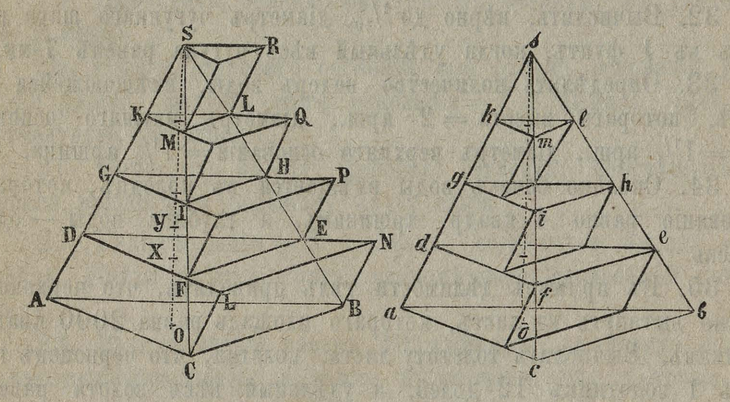
39. Конусъ изъ дуба погруженъ въ спиртъ вершиною внизъ. Найти, какая часть высоты конуса находится въ жидкости, если удѣльный вѣсъ дуба равенъ 0,68, а спирта 0,890.

Взамѣнъ §§ 501—504.

Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны между собою (фиг. 280 и 281).

Пусть въ тетраэдрахъ $SABC$ и $sabc$ основанія ABC и abc равномѣрны и высоты SO и so равны между собою; надобно доказать, что тетраэдры равномѣрны. Положимъ, что тетраэдры неравномѣрны, и пусть $SABC$ больше тетраэдра $sabc$. Разность между объемами этихъ тетраэдровъ будетъ нѣкоторый объемъ,

Фиг. 280-я. Фиг. 281-я.



его можно обратить въ призму, которой основаніе равно треугольнику ABC, а высота — частному отъ раздѣленія объема этой разности на площадь основанія ABC; положимъ, что $OУ$ равна этой высотѣ. И такъ, полагаемъ $SABC - sabc = ABC \times OУ$. Раздѣлимъ высоты SO и so на одинаковое число равныхъ частей, но такихъ, которыя меньше линіи $OУ$; при такомъ условіи, по крайней мѣрѣ, одна точка дѣленія X придется между точками O и $У$. Черезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ: вслѣдствіе § 481, заключаемъ, что сѣченіе $DEF = def$, $GHI = ghi$, $KLM = klm$. Черезъ точки B и C въ плоскостяхъ ABS и ACS проведемъ прямыя BN и CL параллельно AS до пересѣченія съ продолженными DE и DF; получимъ призму $ABCDN$. Подобнымъ построеніемъ получимъ призмы $DFEP$, $GHIQ$, $defa$, $ghid$, $klmg$; а для построенія призмы $KLMR$, проведемъ черезъ вершину S плоскость, параллельную основанію.

Мы уже замѣтили, что сѣченія DEF и def равномѣрны; поэтому призмы $DEFP$ и $defa$ равномѣрны (§ 499); по той же причинѣ призмы $GHJQ$ и $ghid$, $KLMR$ и $klmg$ равномѣрны. Поэтому разность между суммою призмъ, описанныхъ около тетраэдра $SABC$ и вписанныхъ въ тетраэдрѣ $sabc$, равна призмѣ $ABCN$. Означимъ сумму описанныхъ призмъ черезъ Σ, а сумму призмъ вписанныхъ черезъ Σ; получимъ

$$\Sigma - \Sigma = ABC \cdot OX,$$

но
$$SABC - sabc = ABC \cdot OY.$$

Сравнивая полученныя разности, находимъ, что уменьшаемое $SABC$ второй разности меньше уменьшаемаго первой разности, а вычитаемое $sabc$ второй разности больше вычитаемаго первой разности; по этимъ двумъ причинамъ, вторая разность меньше первой, т. е.
$$ABC \cdot OY < ABC \cdot OX;$$

отсюда
$$OY < OX,$$

что невѣрно; значитъ, невѣрно предположеніе будто бы тетраэдры неравномѣрны.

Конецъ.

СОДЕРЖАНІЕ.

			§§	Стр.
Введеніе.		Три рода протяженій.—Прямая линія.— Плоскость. — Предметъ Геометріи и ея раздѣленіе	1	1
Отдѣлъ	**I.**	Углы. — Перпендикулярныя и наклонныя.—Свойство угловъ, образуемыхъ двумя прямыми съ сѣкущею. — Параллельныя линіи	20	7
Отдѣлъ	**II.**	Прямолинейныя фигуры	80	38
Отдѣлъ	**III.**	Круговая линія. — Вопросы	134	63
Отдѣлъ	**IV.**	Пропорціональность и подобіе фигуръ.— Вопросы	211	102
Отдѣлъ	**V.**	Измѣреніе и сравненіе площадей прямолинейныхъ фигуръ. — Вопросы	277	145
Отдѣлъ	**VI.**	Правильные многоугольники.— Измѣреніе окружности и площади круга	309	163
Отдѣлъ	**VII.**	Линіи въ пространствѣ и плоскости. — Двугранные и многогранные углы . . .	369	206
Отдѣлъ	**VIII.**	Многогранники	443	237
Отдѣлъ	**IX.**	Круглыя тѣла	517	276
Отдѣлъ	**X.**	Предложенія и вопросы для упражненій	—	323

Примѣчаніе. Параграфы, отмѣченные звѣздочками (*), можно пропускать.